N° d'ordre 2389

THESE

présentée à

l'UNIVERSITE PARIS SUD
Centre d'Orsay

pour obtenir le grade de
Docteur ès Sciences Physiques

par

Bernard LAZAREFF

ROLE DE LA PHASE CORONALE DANS LA DYNAMIQUE DU MILIEU INTERSTELLAIRE

Soutenue le 25 Mai 1981 devant la Commission d'Examen :

R.OMNES	Président
J.AUDOUZE	Examinateurs
D.CESARSKY	
J.HEYVAERTS	
P.LENA	
J.LEQUEUX	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Remerciements

Que Jean Audouze veuille bien trouver ici l'expression de mes sincères remerciements. Il a suscité mon intéret pour les problèmes hydrodynamiques, a su créer un environnement favorable, et m'a encouragé tout au long de mon travail.

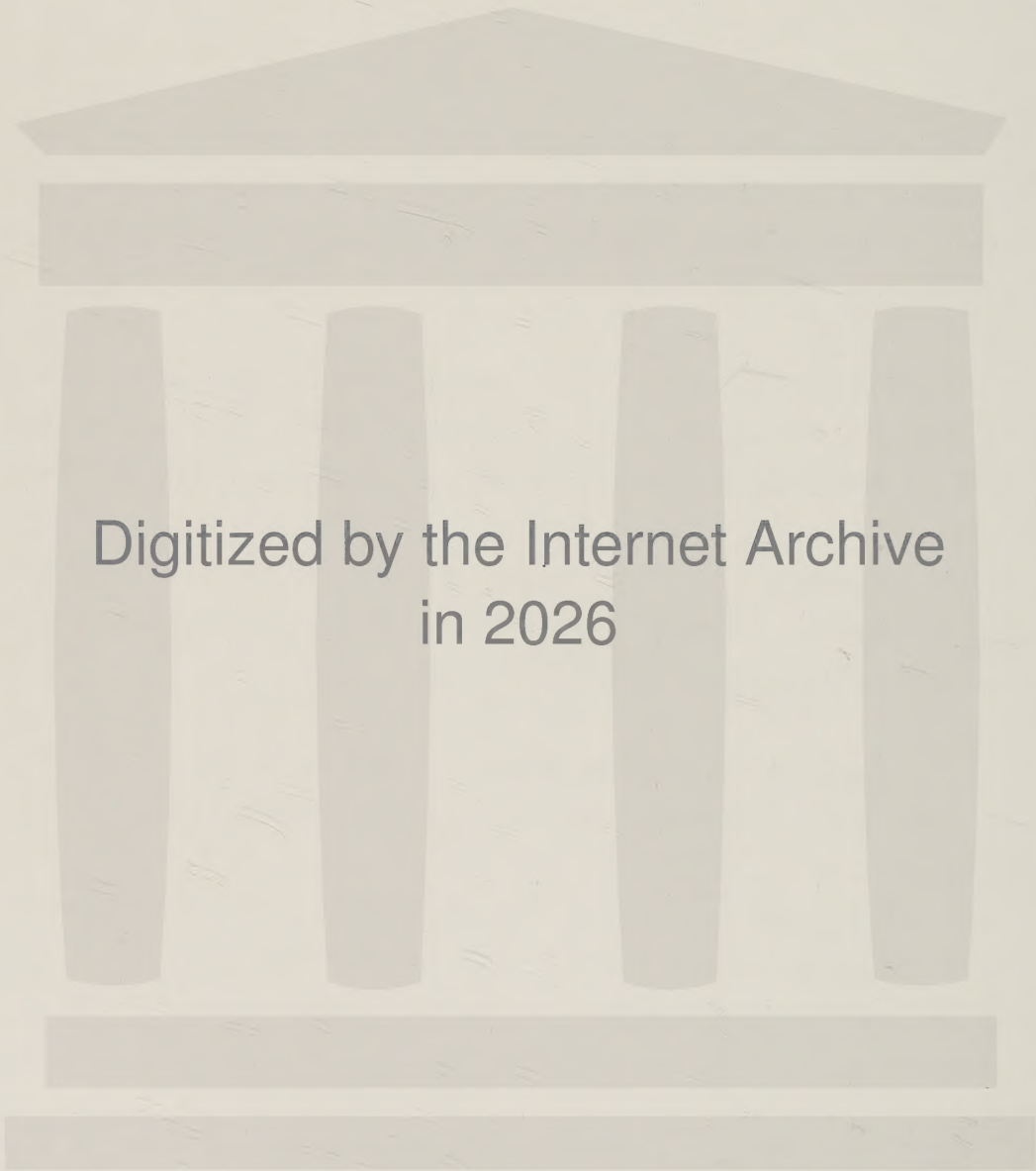
Je tiens à dire l'excellent souvenir que je garderai des collaborations avec Jean-Pierre Chièze et Diego Cesarsky. J'espère qu'elles se poursuivront, car les problèmes que nous avons abordés ensemble sont loin d'être clos.

Les discussions avec les autres membres de notre groupe d'évolution galactique, particulièrement James Lequeux et Laurent Vigroux, ont souvent été fructueuses et stimulantes.

Je remercie R.Klapisch de m'avoir donné accès aux facilités du laboratoire R.Bernas, à proximité de mon lieu d'enseignement.

La plupart des calculs ont été effectués au centre de calcul de Paris-Sud-Informatique. Je tiens à dire que la compétence et la disponibilité jamais en défaut des membres du service de calcul m'ont été du plus grand secours.

Cette thèse n'a pu prendre sa forme présente que grâce à la dactylographie minutieuse de S.Corbin, et aux talents graphiques de M.C.Pantalacci et F.C.Foy.


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547316_0031

PLAN DU TRAVAIL

PRESENTATION D'ENSEMBLE

Première partie :

EVOLUTION DE LA POPULATION DES NUAGES INTERSTELLAIRES DIFFUS

Deuxième partie :

EVOLUTION D'UN RESTE DE SUPERNOVA DOMINE PAR L'EVAPORATION DES NUAGES INTERSTELLAIRES

Troisième partie :

MODELE DYNAMIQUE DE NEBULEUSE PLANETAIRE

Annexe :

AUTRES TRAVAUX

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Le travail qui va être présenté comporte trois parties, qui ne suivent pas une progression linéaire, mais sont centrées autour d'un thème commun : le rôle de la phase coronale dans la dynamique du milieu interstellaire. La première partie est une étude de l'évolution de la population des nuages HI en présence d'un milieu internuage de type coronal, entretenu par les explosions de supernovae. La seconde partie fait pendant à le première : c'est une étude de l'évolution d'un reste de supernova dans un milieu interstellaire inhomogène. Ces deux travaux ont été réalisés en collaboration avec J.P.Chièze. La troisième partie propose un modèle dynamique de nébuleuse planétaire dont la morphologie et la dynamique doivent leur origine à une cavité centrale remplie de gaz coronal. Cette étude a été menée en commun avec D.Cesarsky. On trouvera en annexe plusieurs articles qui font partie de mon activité scientifique au cours de ces dernières années, mais ne se rattachent pas directement à l'ensemble défini ci-dessus.

Nature et propriétés de la phase coronale

Donnons d'entrée la définition de la phase coronale : c'est l'état du milieu interstellaire lorsque sa température est telle que l'énergie kT soit supérieure à la dernière énergie d'ionisation des éléments significatifs du point de vue des pertes radiatives. Sous cette forme ramassée, cette définition est nécéssairement incomplète, mais elle contient l'essentiel.

Les températures élevées influent de trois manières sur les propriétés du gaz. En premier lieu, les coefficients d'ionisation collisionnelle augmentent rapidement avec T, puis saturent pour $kT \simeq \chi e$. Si le champ UV susceptible de donner lieu à des photoionisations est absent ou suffisamment faible, on a un régime où les ionisations collisionnelles sont en compétition avec les recombinaisons radiatives; le degré d'ionisation à l'équilibre est alors indépendant de la densité; on dit qu'on fait l'approximation coronale. Si le champ UV est important, la photoionisation peut être dominante, et l'approximation coronale ne plus être valable; mais si les collisions seules suffisent à assurer une ionisation quasi complète, la distinction est sans importance quant au résultat : le gaz est dans un état coronal.

Mentionnons toutefois que, dans l'intervalle de températures 3 10^5 K - 10^7K, l'ionisation des éléments abondants H et He est totale, mais que l'état d'ionisation de quelques éléments mineurs peut influer sur les pertes radiatives, dont nous allons maintenant parler.

Le second effet des températures élevées, bien qu'indirect, est plus important que le premier : la diminution des pertes radiatives. Comme on peut le voir sur la figure 4.1b de la troisième partie, la fonction de refroidissement $\Lambda(T)$ décroît lorsque la température passe de 2 10^5 à 10^7 K. Le maximum de la fonction de refroidissement entre 10^4 et 10^7 K correspond au domaine où les énergies thermiques sont du même ordre que les énergies de liaison (et de transition) électroniques des atomes et des ions. En dessous de la limite inférieure, seules quelques transitions de structure fine d'éléments traces sont excitées. Au dessus de 10^7 K, les principaux éléments responsables des pertes radiatives : C, O, Ne, et bien sûr H et He sont complètement ionisés, et le seul processus radiatif qui subsiste est le bremsstrahlung. Avant de poursuivre, rappelons que la puissance rayonnée est $n_H \Lambda(T)$ par atome, et $n_H^2 \Lambda(T)$ par unité de volume. Du point de vue de la dynamique du gaz, la denrée la plus précieuse est l'énergie, comprise comme la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique, et les processus hydrodynamiques se ramènent souvent à des échanges entre ces deux formes. Celle qui est rayonnée sous forme de photons est, dans un milieu optiquement mince, une perte nette. Un choc fort donne un exemple de conversion d'énergie cinétique en énergie interne. Si U est le saut de vitesse au travers du choc, la température aval est donnée par :

$$T_1 = \mu U^2 / 3k$$

où μ est la masse moyenne par particule, et où on a négligé pour simplifier une éventuelle énergie d'ionisation. Le temps de vie de l'énergie interne du gaz aval vis a vis des pertes radiatives est donné par :

$$\tau_r = 3/2\, k T_1 / n_1 \Lambda(T_1)$$

Dès lors que le choc est fort, $n_1 = 4 n_o$ et :

$$\tau_r \propto T_1 / \Lambda(T_1)$$

Pour $T_1 < 10^5$K ($U < 70$ km s^{-1}), Λ croît plus vite que T, et le temps caractéristique de refroidissement est plus faible derrière le choc que devant. Autrement dit, si le choc a une force (vitesse de propagation) insuffisante, il est inefficace pour chauffer le milieu où il se propage. La situation est différente si le choc a une force suffisante ($U > 100$ km s^{-1}) ou encore si le milieu est déjà suffisamment chaud ($T > 10^6$K). Dans ces conditions, le temps de refroidissement croît rapidement avec la température. On retiendra qu'il existe un effet de seuil dans le chauffage par onde de choc.

Un autre exemple de situation où la forme particulière de Λ joue un rôle est celle où on désire maintenir une pression donnée dans un volume V, qui peut être la partie internuage du milieu interstellaire, ou encore, comme on le verra dans la troisième partie, la cavité centrale d'une nébuleuse planétaire. Le maitien d'une pression p=nkT impose de compenser par une source appropriée les pertes radiatives :

$$S = n_H^2 V \Lambda(T)$$

Mais, à pression fixée, $n \propto T^{-1}$, donc :

$$S \propto T^{-2} \Lambda(T)$$

On retrouve une situation analogue à celle de l'exemple précédent (avec un exposant différent), la puissance nécéssaire décroît rapidement quand $T \gtrsim 2\ 10^5$K.

Le troisième effet des températures élevées dans la phase coronale est la valeur élevée de la conductivité thermique, qui croît comme $T^{5/2}$. En présence d'un champ magnétique, la conductivité est anisotrope; elle est pratiquement négligeable perpendiculairement au champ. Si toutefois la configuration du champ n'est pas trop chaotique, et si la pression magnétique ne domine pas celle du gaz, on peut penser que les déplacements de matière sont capables de "peigner" le champ et de l'aligner dans la direction des transferts d'énergie.

Le milieu interstellaire vers 1970

Nous allons retracer rapidement l'évolution des idées sur le milieu interstellaire. L'évocation d'idées maintenant "dépassées" a plus qu'un intérêt historique : elle permet de mitiger l'enthousiasme qu'on pourrait avoir pour des modèles plus "modernes".

La présence de matière dans l'espace interstellaire est connue depuis longtemps, que ce soit par l'existence des nébuleuses diverses, des nuages sombres, ou encore par la présence de raies dites interstellaires, stationnaires dans le spectre d'une binaire spectroscopique (HARTMANN, Ap.J. 19,268,1904; SLIPHER, Low.Obs.Bull.,2,1,1909; PLASKETT et PEARCE, Publ.Dom.Astr.Obs. V,3,1935). La distribution spatiale de cette matière a pu être précisée par les observations en raie 21cm. Les mesures combinées en émission et en absorption (HAGEN et McCLAIN Ap.J. 120,368,1954) fournissent la température de brillance et la profondeur optique, dont on déduit, pour un nuage homogène, la température de spin et la densité surfacique. On est souvent amené à schématiser les nuages en leur attribuant des propriétés simples : homogénéité, forme sphérique, existence d'un type standard. Chacune de ces hypothèses simplificatrices a été infirmée par les observations. CLARK (Ap.J. 142, 1398,1965) a mis en évidence le fait que le profil d'émission 21 cm d'un nuage est généralement plus large que celui d'absorption. L'interprétation de ce fait a donné lieu à une controverse. Certains (voir GREISEN Ap.J. 184,363,1973) arguaient que la différence de largeur résultait de la différence des résolutions angulaires effectives des mesures en absorption et en émission. D'autres (LAZAREFF, Astr.Ap. 42, 25,1975) y voyaient la pruve de l'existence sur la ligne de visée de gaz à différentes températures, montrant que la première hypothèse conduisait à une contradiction. En fait, la situation est probablement plus complexe. Un examen des résultats des mesures combinées émission et absorption récentes (outre notre travail cité ci-dessus, voir HUGHES et al Ap.J.Suppl. 23,323,1971; RADHAKRISHNAN et al Ap.J.Suppl. 24, 1, 1972; DICKEY et al, Ap.J. 228,465,1979; CROVISIER et al Astr.Ap. 41, 229,1980) montre que :

a) le profil d'émission peut souvent être décomposé en une composante large et une ou plusieurs composantes étroites

b) la composante large a une température de spin élevée, dont on n'a en général qu'une limite inférieure de l'ordre de 1000K
c) la (ou les) composante étroite est toujours vue en absorption, pourvu que la source continuum soit extragalactique et pas trop faible, et elle a une température de spin de l'ordre de 100K; mais :
d) en se restreignant aux composantes étroites, le profil d'émission demeure plus large que celui d'absorption. Il semble qu'une certaine confusion existe entre les points b) et d). Le gaz à l'origine de la composante b) peut être appelé, par définition, internuage HI, sans qu'il soit toutefois établi qu'il emplit tout le volume internuage; nous y reviendrons. Le phénomène d), appuyé par les profils de raie OH 18cm et CO 3mm dont on dispose dans certains cas, montre que chaque nuage (défini comme une des composantes étroites du profil d'émission) a une structure inhomogène, certaines parties (centrales?) ayant une température plus faible (CROVISIER, preprint, et notre travail cité plus haut)
Notre (dé-)formation radioastronomique nous a fait privilégier les observations 21cm de l'hydrogène neutre sous forme atomique. Mais il faut également mentionner la série d'observations de HOBBS (voir Ap.J. 191, 395,1974, et références citées) des raies optiques du sodium et du potassium, qui complètent notre information sur la densité electronique et la distribution de tailles des nuages. Par ailleurs, les mesures de dispersion des pulsars, les raies de recombinaison diffuses (radio ou optiques) montrent qu'il existe en dehors des régions HII identifiées une composante ionisée (partiellement?) étendue. Mentionnons enfin pour être complet les nuages moléculaires, qui peuvent contenir une fraction importante de la masse, mais ne jouent pas directement un rôle dans la dynamique du milieu interstellaire.

Cet ensemble d'observations a suscité, vers 1970, une série de modèles dont le plus connu est celui de FIELD et al (Ap.J.Lett. 155,49,1969). Ces modèles supposent que le milieu interstellaire bénéficie d'un taux de chauffage et d'ionisation par particule constant, dont la source est soit des rayons cosmiques de basse énergie, soit des X mous. Dans ces conditions, la forme de la fonction de refroidissement entraîne une séparation du milieu interstellaire en deux phases stables en équilibre de pression : l'une de température T$\sim$50K, identifiée avec les "nuages HI";

l'autre, à 10^4K, faiblement ionisée (x~0.1), identifiée avec l'"internuage HI", et expliquant la mesure de dispersion des pulsars. Diverses variantes instationnaires de ce modèle ont été publiées. Le chauffage dû à l'effet photoélectrique sur les grains a été proposé par WATSON (Ap.J. 176,103,1972). On peut noter que tous ces modèles attribuent au gaz interstellaire des températures d'au plus un électron-volt, reflétant le domaine spectral des observations.

Observations de la phase coronale dans le milieu interstellaire

L'existence de la phase coronale avait été prédite dès 1956 par SPITZER (Ap.J. 124,20). La première confirmation en a été donnée par l'observation de raies d'absorption du doublet de résonance O VI 1032-1037 Å (ROGERSON et al Ap.J.Lett. 181,L110,1973). L'abondance de l'état d'ionisation O^{5+} est maximum autour de T= 3 10^5K, sans jamais dépasser 10% de l'abondance totale d'oxygène. Mais, bien que dominé en abondance par les états d'ionisation voisins, il posséde sur eux l'avantage unique d'avoir une raie de résonance de longueur d'onde supérieure à 912 A. Les premières observations ont montré que les spectres dans la direction des étoiles OB proches contenaient une ou plusieurs composantes d'absorption du doublet OVI. L'analyse statistique détaillée des résultats (JENKINS Ap.J. 220,107,1978) montre que les régions émettrices de OVI ne sont pas associées aux étoiles observées, qu'elles n'occupent pas la plus grande partie du volume internuage, et ne présentent pas de corrélation nette avec l'extinction des poussières. COWIE et al (Ap.J. 232, 467,1979), ainsi que COWIE et YORK (Ap.J. 220,129,1978) ont montré que les régions de formation des raies d'absorption de OVI sont associées à du gaz neutre ou dans des états d'ionisation intermédiaire (raies de NII et SiIII), et proposent de les identifier aux "couronnes" conductives des nuages immergés dans un internuage chaud à environ 10^6K.

Il y a un "trou" dans les observations entre 13.6 et environ 100ev. A ces énergies, la photoionisation de H et He rend le milieu interstellaire opaque. Au-delà, les observations en X mous (WILLIAMSON et al, Ap.J.Lett. 193,L133,1974; TANAKA et BLEEKER, Sp.Sci.Rev. 20,815,1977) indiquent qu'une grande partie du milieu internuage est occupée par du gaz à environ 10^6K, avec des fluctuations d'au moins un facteur deux de

part et d'autre de cette valeur. Notons toutefois que HEILES (Ap.J. 235, 833,1980) défend la prépondérance volumique de l'internuage HI à 10^4K, sans que ce soit nécéssairement en conflit avec les observations en X mous et dans l'UV, qui ne sondent le voisinage du soleil que dans un rayon de quelques centaines de parsecs.

Modèles récents du milieu interstellaire

Les observations que nous venons de passer rapidement en revue ont suscité une nouvelle génération de modèles, dans lesquels la phase coronale du milieu interstellaire joue un rôle central. L'idée en a été formulée pour la première fois par COX et SMITH (Ap.J.Lett. 189,L105,1974) qui ont proposé que les restes de supernovae, au lieu d'évoluer isolément jusqu'à refroidissement complet, pourraient se rejoindre et constituer un système communicant de volumes de gaz chaud à faible densité. D'après ce qui a été dit plus haut au sujet des propriétés de la phase coronale, l'onde de choc d'une supernova se propage dans un tel milieu ambiant avec un rendement énergétique bien meilleur que s'il était plus froid et plus dense. Une fois créé, un internuage coronal est relativement facile à maintenir. Cette idée a été développée par McKEE et OSTRIKER (Ap.J. 218,148,1977), qui prennent en compte l'évaporation des nuages (COWIE et McKEE Ap.J. 211,135,1977) au contact de l'internuage chaud. Dans leur modèle, l'évolution des restes de supernovae est dominée, non par la masse du milieu ambiant englobé, mais par l'évaporation des nuages. En particulier, l'âge et le rayon d'un reste lorsque les pertes radiatives deviennent importantes dépendent de la population des nuages froids présents uniquement au travers d'un moment du spectre :

$$\Theta = \int n(m)\, a(m)\, dm$$

où n(m) est le nombre de nuages par unité de volume et par intervalle de masse, et a(m) le rayon d'un nuage. Un état d'équilibre s'établit, dans lequel la phase radiative de l'évolution des restes intervient juste assez tôt pour que la densité et l'énergie de la phase coronale soient stationnaires. Les points forts de ce modèle sont qu'il reproduit la température observée de la phase coronale, ainsi que la pression du milieu interstellaire, qu'on sait par ailleurs déduire des

observations de la phase nuage. Une preuve directe de l'importance de l'évaporation est donnée par la corrélation entre le rayon et la densité (déduite des observations X) pour les restes de supernovae jeunes (voir fig 4 de l'article cité, également LONG et HELFAND (Ap.J.Lett. 234,L77,1979). Notons que ce modèle repose sur un certain nombre d'approximations, caractéristiques de régimes dominants, qui permettent de mener les calculs analytiquement, mais ne sont vérifiées qu'avec une faible marge par le résultat final (densité ambiante négligeable dans l'évolution des restes, phase radiative intervenant avant la percolation). D'ailleurs, un modèle complémentaire, où la propagation de chocs dans l'internuage coronal joue le rôle principal, a été proposé par COX (Ap.J. 234,863,1979). Un travail en cours, par J.P.Chièze et B.Lazareff, vise à donner une description unifiée des divers régimes et à en établir la stabilité.

Le spectre de nuages : son importance

Nous avons noté que dans le modèle discuté ci-dessus, la population des nuages et le milieu internuage sont mutuellement dépendants. Or, le modèle de McKee et Ostriker est en fait un modèle du milieu internuage où la population des nuages est un paramètre fixé (en accord avec les observations). Une vérification plus complète du modèle consisterait à libérer le spectre de nuages en le promouvant du statut de paramètre à celui de variable. C'est ce que nous avons fait, mais pour séparer les problèmes, nous avons gelé les propriétés du milieu internuage en fixant ses paramètres aux valeurs trouvées par McKee et Ostriker.

Ouvrons maintenant une parenthèse pour expliquer comment nous avons été amenés à nous intéresser au spectre de masse des nuages interstellaires. Il y quelques années, J.P.Chièze, L.Vigroux, et moi-même, dans le cadre du programme d'évolution galactique de notre groupe, avons abordé le problème de la formation des galaxies elliptiques. Nous étions particulièrement intéressés par l'évolution chimique, la relation couleur-magnitude, et l'origine du gaz intergalactique, et avions en vue un modèle de vent galactique. Les modèles existants

(MATHEWS et BAKER Ap.J. 170,241,1971; LARSON M.N.R.A.S. 169,229,1974; BREGMAN Ap.J. 224,768,1978) nous semblaient contenir une part d'arbitraire, supposant, les uns, que le gaz est homogène, les autres qu'il est distribué dans une population de nuages dont la fréquence de collisions est déterminée par une loi simple mais non justifiée. Ayant mis au point un code numérique approprié, nous nous sommes rendus compte que les propriétés des galaxies modèles formées dépendaient de façon cruciale des hypothèses faites sur le comportement du gaz. C'est ainsi que nous avons été amenés à étudier plus en détail la structure et le comportement d'un milieu interstellaire inhomogène.

D'une part, pour une densité moyenne donnée, la répartition du gaz dans le spectre de masse des nuages détermine la fréquence des collisions, donc l'importance de la dissipation lors des phases de formation et d'évolution d'une galaxie. D'autre part, ayant établi qu'au moins dans certains régimes, le milieu internuage lui-même est fortement couplé aux nuages en présence, on ne peut pas a priori traiter ces deux composantes isolément.

Le modèle que nous proposons repose sur une analyse détaillée des processus d'interaction des nuages entre eux et avec le milieu internuage. Plusieurs auteurs ont déjà abordé le problème de l'évolution d'une population de nuages interstellaires sous l'effet des collisions. Ils se placent souvent d'un point de vue assez formel, se donnent une loi analytique arbitraire pour la section efficace de coalescence, et n'envisagent en général pas la possibilité de fragmentation. Par ailleurs, quelques auteurs ont étudié le processus de collision lui-même, mais soit dans une géométrie plan-parallèle, soit pour un choc frontal. Or, les nuages interstellaires diffus sont confinés essentiellement par la pression ambiante, qui ne s'oppose aucunement à leur déformation ou à leur fragmentation. La cohésion et l'intégrité des nuages proches de la limite de Jeans sont assurées par la gravité. Pour les nuages plus petits, nous montrons que les effets dynamiques de l'évaporation induisent des différences de pression dont l'effet est analogue à une tension superficielle. Par ailleurs, une simulation hydrodynamique à deux dimensions nous permet d'estimer l'inélasticité des collisions et la répartition de l'énergie cinétique résiduelle: en

comparant cette dernière aux énergies de liaison (gravité et tension superficielle) nous déterminons les sections efficaces de coalescence et de fragmentation. En prenant en compte également les processus d'échange de masse entre les nuages et l'internuage déjà envisagés par McKee et Ostriker, nous suivons l'évolution du spectre des nuages, qui tend en $\sim 10^8$ ans vers une répartition d'équilibre, caractérisée schématiquement par : $n(m) \propto m^{-1.8}$, une coupure haute à la limite de Jeans, et une coupure basse vers $1M_\odot$. Ce spectre d'équilibre est compatible avec les différentes déterminations observationnelles de l'exposant spectral, qui s'échelonnent entre 1.5 et 2. Le flux de masse à la limite de Jeans semble trop faible pour expliquer la valeur observée du taux de formation d'étoiles; les inhomogénéités à grande échelle de la distribution du gaz, donnant lieu à une augmentation locale du taux de formation $\propto \rho^2$ pourraient en accroître suffisamment la valeur moyenne pour réconcilier théorie et observation sur ce point.

Le fait que notre modèle de la population des nuages HI, qui est basé sur une étude détaillée des processus élémentaires, soit en accord relativement satisfaisant avec les observations, donne bon espoir quant à la possibilité de construire un modèle physique global du milieu interstellaire. Un travail assez semblable au nôtre (COWIE Ap.J. 236, 868,1980) est paru quasi simultanément; l'accent y est mis moins sur les processus physiques élémentaires que sur les régimes de comportement de l'ensemble de la population.

Evolution et structure des restes de supernova évaporatifs.

Les modèles d'internuage chaud décrits ci-dessus font intervenir un nouveau régime d'évolution des restes de supernova, où l'évaporation des nuages joue un rôle crucial. Auparavant, le modèle de Sedov servait de référence aux discussions des observations et des simulations numériques. C'est le régime idéalisé où la masse éjectée est négligeable devant celle provenant du milieu ambiant (de densité uniforme) et où les pertes radiatives sont négligeables. Un autre régime simple apparaît quand la densité ambiante est négligeable devant celle qui résulte de l'évaporation des nuages. Tout comme dans le cas du modèle de Sedov, des considérations dimensionnelles suffisent à trouver

PREMIERE PARTIE

EVOLUTION DE LA POPULATION

DES NUAGES INTERSTELLAIRES DIFFUS

Astron. Astrophys. 91, 290–301 (1980)

ASTRONOMY AND ASTROPHYSICS

A Model for the H I Cloud Spectrum in the Solar Neighbourhood

J. P. Chièze[1,2] and B. Lazareff[1,3]

[1] Institut d'Astrophysique de Paris, 98 bis Blvd Arago, F-75014 Paris, France
[2] Service de Physique Nucléaire, Centre d'Etudes de Bruyères le Châtel, BP 61, F-92120 Montrouge, France
[3] Département de Radioastronomie, Observatoire de Meudon, F-92190 Meudon, France

Received January 2, accepted April 14, 1980

Summary. We present a model for the evolution of the H I cloud spectrum consistent with a picture of the interstellar medium regulated by supernova explosions (McKee and Ostriker, 1977). We consider the net effect of evaporation of the clouds in the hot coronal gas, and of collisions with supernova remnants before and after the radiative phase. Besides these interactive effects with the intercloud medium, we treat collisions among clouds paying special attention to ensuing possible fragmentation.

The model predicts a noticeable depletion of low mass clouds, mainly due to evaporation. Adopting a maximum stable cloud mass $m_c = 10^3\ M_\odot$, we infer a rate of molecular clouds formation: $F = 1.3\ 10^{-5}\ M_\odot\ \mathrm{pc}^{-3}\ \mathrm{yr}^{-1}$ in the solar neighbourhood.

Key words: interstellar clouds – interstellar medium

Introduction

Both from observational and theoretical standpoints, the existence and properties of the coronal gas which fills a large fraction of the galactic disk are now becoming clearer (for a review, see for example McCray and Snow, 1979). This evolution of the ideas about the interstellar medium (I.S.M.) stems from the recognition of strong interactions between the dense cold gas phase of the ISM and the hot, highly unsteady ambient medium in which it is immersed. In the solar neighbourhood, the cold neutral gas is shared in approximately equal amounts by a *diffuse phase* made up with H I clouds, and a *molecular phase*, in which we include dark clouds and globules.

The formation on a large scale of molecules in a cloud is possible if its mean density substantially exceeds that of standard diffuse clouds, $n_H \sim 50\ \mathrm{cm}^{-3}$.

There are several possible ways for a diffuse cloud to get the density increase which may trigger the more than a hundred fold increase observed in the molecular phase. One is the growth of diffuse clouds through collisions and accretion. This mechanism, first suggested by Oort (1954) has been extensively studied through numerical simulations. It has been recognized that difficulties may arise due to the high collision rate. When a cloud, which exceeds some critical mass m_c, begins to contract, it may be thought to form stars directly, with an efficiency r, or to enter a molecular phase for a mean time τ_m, which ends with the star formation stage. One of the main issues of collisional growth is the prediction of the rate at which the diffuse phase flows into clouds with mass m_c.

Send offprint requests to: J. P. Chièze

On the other hand, and independently, the value of the mass flux towards high masses, when brought together with the molecular phase mass, may give an estimate of its mean life time. High values of τ_m, in excess of 10^8 yr are presently favoured (Scoville and Hersh, 1979).

We present here a model for the cycling of the diffuse phase towards the molecular phase which, besides the simple collision-accretion scheme, introduces the strong interactions to which clouds are subject in the actual active ISM.

The model proposed by McKee and Ostriker (1977) accounts for many observed properties of the ISM. Mass exchanges between the cold and hot phases of the ISM, through the evaporation of the cloud material in the hot ambient medium (HIM) and the formation of dense cold shells in old supernovae remnants (SNR) are at the basis of the theory. Here we propose a simple analysis of the response of a given cloud spectrum to a hot ambient medium regulated by supernovae explosions. We consider the restricted problem in which the typical properties of the HIM and the supernova rate are assumed to remain constant regardless of the evolution of the cloud phase. In such a picture, individual clouds are subject to:

(i) ablation when colliding with SNR blast waves;

(ii) evaporation into the HIM;

(iii) accretion of the dense material which results from the cooling of old SNR;

(iv) encounters with other clouds.

In this latter respect we consider the fragmentation of a cloud which may be induced by collision, as suggested by a set of numerical simulations in which we varied the input parameters.

The physical properties we adopt for the clouds, together with the unit system used in this paper are given in Sect. 2. Physical mechanisms which act on individual clouds and model the cloud spectrum are presented in Sects. 3.1–3.6. We give an outline of the numerical treatment of the cloud spectrum in Sect. 3.7. The results are described in Sect. 4 and their relations with observed properties of the ISM and the star formation rate are discussed in Sect. 5.

2. Basic Assumptions

2.1. Units and Notations

Throughout this paper, mass, length and time are in units of $2\ 10^{33}\ \mathrm{g} \approx 1\ M_\odot$, $3\ 10^{18}\ \mathrm{cm} \approx 1\ \mathrm{pc}$, and $3\ 10^{13}\ \mathrm{s} \approx 10^6\ \mathrm{yr} \equiv 1\ \mathrm{My}$ respectively. In this system, appropriate for the interstellar medium, the most useful secondary units are for velocity: $1\ \mathrm{pc\ My}^{-1} \approx 1\ \mathrm{km\ s}^{-1}$, for density: $1\ M_\odot\ \mathrm{pc}^{-3} \approx 31.78$ hydrogen nuclei per

cubic centimeter, with an assumed $n(\mathrm{He})/n(\mathrm{H})=0.1$. We then have for the gas pressure the numerical formula:

$$p=5.9\ 10^{-3}\ (1.1\times x)\varrho T \quad M_\odot\ \mathrm{pc}^{-1}\ \mathrm{My}^{-2} \tag{1}$$

where $x=n_e/n_H$ is the fractional ionization of the gas and the temperature T is expressed in Kelvin. Adiabatic and isothermal sound speeds are respectively given by:

$$C_s=9.9\ 10^{-2}\ [(1.1+x)T]^{1/2} \quad \mathrm{pc\ My}^{-1} \tag{2}$$

$$C_0=7.6\ 10^{-2}\ [(1.1+x)T]^{1/2} \quad \mathrm{pc\ My}^{-1} \tag{3}$$

The gravitational constant comes out as:

$$G=4.50\ 10^{-3}\ \mathrm{pc}^3\ \mathrm{My}^{-2}\ M_\odot^{-1}.$$

and the supernova rate is taken to be:

$$S=10^{-7}\ \mathrm{pc}^{-3}\ \mathrm{My}^{-1}=10^{-13}\ \mathrm{pc}^{-3}\ \mathrm{yr}^{-1}.$$

As pointed out in the introduction, the cloud population is not an isolated one: we choose to adopt a description of the intercloud medium according to the general theory of the interstellar medium given by McKee and Ostriker (1977), hereinafter referenced as MO 77. Whenever necessary we will make use of the various parameters and expressions introduced in the presentation of the theory and defined in the Glossary of MO 77, to which the reader is invited to refer. If p is the pressure and $\tilde{P}=p/k$, then:

$$p/(1\ M_\odot\ \mathrm{pc}^{-1}\ \mathrm{My}^{-2})=1.86\ 10^{-4}\ \tilde{P}/(1\ \mathrm{K\ cm}^{-3}). \tag{4}$$

2.2. Cloud Morphology

We are concerned in this work with the H I cloud spectrum. High density molecular clouds are not explicitly included. The transition from H I clouds to molecular clouds may be thought to occur beyond the critical mass where collapse of a cloud is likely to occur. In the absence of rotational and magnetic field, the critical mass for an isothermal sphere of temperature T and uniform density in pressure equilibrium with an ambient medium at pressure p is (McCrea, 1957):

$$m_c=8.9\ T^2(p/k)^{-1/2}\ M_\odot. \tag{5}$$

We take a representative value of the temperature of $T=80$ K, in agreement with the observations of the spin temperature of H I clouds (Dickey et al., 1978). Adopting the value of the typical pressure of the hot ambient medium given by MO 77 with which clouds are to be in rough equilibrium with:

$$p_{typ}=4.97\ 10^{-14}\ \mathrm{dyne\ cm}^{-2}$$
$$=0.67\ M_\odot\ \mathrm{pc}^{-1}\ \mathrm{My}^{-2}$$

we find a critical mass:

$$m_c\approx 10^3\times M_\odot.$$

Higher masses would be derived by including magnetic field. Much higher masses, as derived from CO observations, may be thought to result from the low pressure in the interarm region (see for example Jura, 1978) or from the collisional growth of molecular clouds (Kwan, 1979).

We assume for simplicity that clouds are spherical. According to the theory of MO 77, clouds with cold cores are surrounded by two warm envelopes which develop due to the ambient UV (OB stars) and soft X-ray (supernovae remnants) fields. But we show in Sect. 3.6 that:

– a warm envelope, if any, is swept away each time it is encompassed by a supernova blast wave, and that:

– the time necessary for a new warm envelope to form is, in most cases, greater than the mean time between encounters with SNR's. Thus, we take the radius of a cloud as the radius of its cold core. Clouds without a cold core constitute the low end of the mass spectrum. This needs not to be known with accuracy since it will be shown that the low mass cloud population is strongly deplenished by evaporation in the hot medium. The mass m of a cloud is therefore proportional to the cube of its radius a, neglecting the central density enhancement that is present in clouds near the critical mass.

3. Treatment of Cloud Spectrum Evolution

3.1. Cloud Spectrum – General

The cloud spectrum is described by $g(m)$, the number of clouds per unit volume and per unit mass interval. It extends between m_{inf} and m_{sup}. If a process "p" contributes directly to the removal or creation of clouds of mass m_i, its rate is denoted $\dot{g}_{i,p}$. Other processes "q" contribute a continuous change in the mass of clouds, at a rate $\dot{m}_{i,q}$. The various processes are described below. The mass index i can, in this formal description, be considered to be continuously variable.

3.2. Accretion

Let $\dot{\varrho}_{ac}$ be the rate at which mass is condensed (per unit volume of interstellar medium) during the radiative phase of SNR's. In the present paper, this rate is not derived explicitly from properties of SNR evolution (see Sect. 3.7.). Since the column density in the cold shell of a radiative SNR is much smaller than that of a cloud, it is reasonable to assume that cloud-shell collisions result in accretion of the shell onto the cloud. We also assume that each fragment of a cold shell is eventually accreted onto a cloud, which is expected to be true if the mean free path for cloud collision λ_c is smaller than the radius R_F at which the SNR expansion is halted by the ambient pressure (MO 77). The validity of this second assumption can be checked only after both the cloud spectrum and the intercloud properties are simultaneously and consistently derived, which is beyond the scope of the present paper.

Given these assumptions:

$$\dot{m}_{i,ac}=\dot{\varrho}_{ac}a^2(m_i)/\int_{m_{\mathrm{inf}}}^{m_{\mathrm{sup}}} a^2(m)g(m)\,dm. \tag{6}$$

3.3. Evaporation

We use the evaporation rate found by Cowie and McKee (1977), referenced as CM 77 hereinafter. Using the typical hot intercloud values (MO 77):

$$T_{h,\mathrm{typ}}=4.5\ 10^5\ \mathrm{K}, \quad n_{h,\mathrm{typ}}=3.5\ 10^{-3}\ \mathrm{cm}^{-3},$$

the saturation parameter (CM 77) for a cloud of radius a is: $\sigma_0=0.24/a$. Since σ_0 depends (through T_h and n_h) only weakly on the filling factor Q (MO 77) of the remnant in which a cloud is located, and since saturation sets in at $\sigma_0=2$, we use the unsaturated rate:

$$\dot{m}(T_{h6})=-0.4\ T_{h6}^{5/2}\ aM_\odot\ \mathrm{My}^{-1}. \tag{7}$$

We use $T_6 = T/10^6$ K, and adopt $\phi = 1$ as the evaporation efficiency. Since t_{ev}, (MO 77), is smaller than the typical timescales for cloud processes, we use the mean value:

$$\dot{m}_{ev} = <dm/dt>_Q = \int_0^1 \dot{m}(T_h(Q))dQ. \tag{8}$$

Adopting for $T_h(Q)$ a $Q^{-0.3}$ dependence, intermediate between the pre and post cooling exponents given in MO 77, one finds that:

$$\dot{m}_{ev} = -1.6\ T_{h6,0}^{5/2} a \quad M_\odot\ \mathrm{My}^{-1} \tag{9}$$

where $T_{h6,0}$ is the "ambient" (MO 77) value of the intercloud temperature. One can note that, using "typical" values, the cloud radius at which radiative losses balance the conductive flux is:

$$a_{rad} = 0.16\ T_{h6,typ}^2 n_{h,typ}^{-1} = 9.3\ \mathrm{pc} \tag{10}$$

which is larger than $a(m_{sup}) = 6.4$ pc.

The overall rate of evaporative mass transfer from the clouds to the intercloud medium is given by:

$$\dot{Q}_{ev} = \int_{m_{inf}}^{m_{sup}} |\dot{m}_{ev}| g(m) dm$$
$$= 1.6\ T_{h6,0}^{5/2} \theta \tag{11}$$

where θ is a quantity related to the evaporation parameter Σ of MO 77:

$$\theta = \Phi \int_{m_{inf}}^{m_{sup}} a(m) g(m) dm.$$
$$= \alpha/4\pi\Sigma. \tag{12}$$

3.4. Stability against Fission

In this section, we examine what forces maintain an individual cloud's integrity. The results will be used in the next section. The ambient intercloud pressure confines the clouds, but cannot oppose shape deformations. Only anisotropic forces can do this.

We first examine an interesting property of the evaporative flow solutions of CM 77: there is a pressure difference between the cloud and the intercloud, which has an effect similar to a surface tension. We have numerically integrated Eqs. (26) and (27) of CM 77 to obtain the difference between the cloud pressure p_c and the intercloud pressure p_h. The results are adequately represented by:

$$(p_c - p_h)/p_h = 0.31\ \sigma_1^{1.72}.$$

$$\sigma_1 = \frac{\dot{m}}{4\pi a^2 \varrho_h c_h} = \frac{4\mu\kappa_h}{25 k \varrho_h c_h a} \tag{13}$$

where σ_1 is a dimensionless parameter which uniquely defines (except for similarity transformations) the flow solution in the unsaturated case and the "h" index belongs to intercloud values. It is similar to the σ_0 of CM 77 except that it does not involve Φ_s since we are far from saturation. Thus, for given intercloud parameters, the cloud overpressure varies as $a^{-1.72}$. We have not attempted to solve the problem of coupled heat and gas flow for a non-spherical cloud shape. However, it is clear that evaporation should have an effect similar to a surface tension: the heat flux converges to regions of high surface curvature, and the gas flow should be locally similar to that of a spherical cloud having the same curvature. Since we are interested in the stabilizing effect of this phenomenon, we define an equivalent surface tension using the derivative of pressure with respect to curvature:

$$\tau = \frac{1}{2} \frac{\partial(P_c)}{\partial(1/R)} = 0.86\ (p_c - p_h) a$$
$$= 3\ 10^{-3} \Phi^{1.72} a^{-0.72} T_{h6}^{4.44} \varrho_h^{-0.72} \tag{14}$$

with units 1 pc, 1 My, 1 $M_\odot$, 10^6 K.

The effective mean value of τ, like that of $\dot{m}_{ev}$, differs from that computed in ambient conditions. Let:

$$\gamma_1 = \langle \tau(T_h(Q), \varrho_h(Q)) \rangle_Q / \tau(T_{h0}, \varrho_{h0}). \tag{15}$$

When using the $T(Q)$, $\varrho(Q)$ relations derived in MO 77, this integral is formally divergent, but is weakly dependent on the lower integration bound when the latter is not too small, so we use the mean value between $Q = 0.25$ and $Q = 0.75$. This results in $\gamma_1 \simeq 2.5$. Another effect to be considered is that the distribution of density and temperature inside a SNR is inhomogeneous. Because of the values of the exponents, these inhomogeneities have a much larger effect on τ than on $\dot{m}_{ev}$. Let:

$$\gamma_2 = \langle T^{4.44} \varrho^{-0.72} \rangle / \langle T \rangle_{mass}^{4.44} \langle \varrho \rangle_{vol}^{-0.72} \tag{16}$$

be the ratio of the volume average over a remnant of τ to that computed using the mean values as defined by MO 77. When the distributions derived by Chevalier (1974) are used, very high values of $\gamma_2 (> 10^6)$ result. Conduction and evaporation probably result in more uniform ϱ and T distributions. Besides, if saturation sets in, τ cannot rise above $\tau_{max} \simeq a P_h$, when the evaporative flow becomes sonic. Since the ambient value of σ_1 is $\simeq 0.2$, the evaporative flow becomes sonic for $\sigma_1 \simeq 1.5$, and $\tau \propto \sigma_1^{1.72}$, γ_2 must be less than $(1.5/0.2)^{1.72} = 32$. We adopt a value: $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 = 10$, keeping in mind that it is highly uncertain, and the effective value of τ as a function of ambient intercloud values:

$$\tau = 3\ 10^{-3} \gamma a^{-0.72} T_{h6,0}^{4.44} \varrho_{h0}^{-0.72}. \tag{17}$$

We shall see later, however, that the results are reasonably insensitive to the value of γ.

We now compute the fission barrier due to the combined effect of gravity and surface tension. In the case of quadrupole deformations, using results of Lamb (1945), one can derive:

$$U_g^0 = \frac{16\pi^2}{75} a^5 \varrho_i^2 G. \tag{18}$$

$$U_\tau^0 = \frac{8\pi}{5} \tau a^2. \tag{19}$$

These values are appropriate for the splitting into two fragments of equal masses. Using the standard values of the parameters, one finds that U_τ^0 is larger than U_g^0 for clouds smaller than 40 $M_\odot$, ($\gamma = 1$) or 250 $M_\odot$ ($\gamma = 10$). For a fragment of mass m_f leaving a cloud of mass m, we use the following approximate formulae:

$$U_g = G m_f m / 2a \tag{18}$$

$$U_\tau = 4\pi a_f^2 \tau(a) \tag{19}$$

3.5. Cloud Collisions

Since Oort (1954) proposed a model for the collisional growth of interstellar clouds, various authors have investigated the mass spectrum resulting from binary collisions. Field and Saslaw (1965), Field and Hutchins (1968), and Penston et al. (1969), have investigated the spectrum resulting from various expressions for $\langle \sigma v \rangle_{mm'}$, the rate coefficient for coalescence. Taff and Savedoff (1973) have introduced the possibility of fragmentation resulting

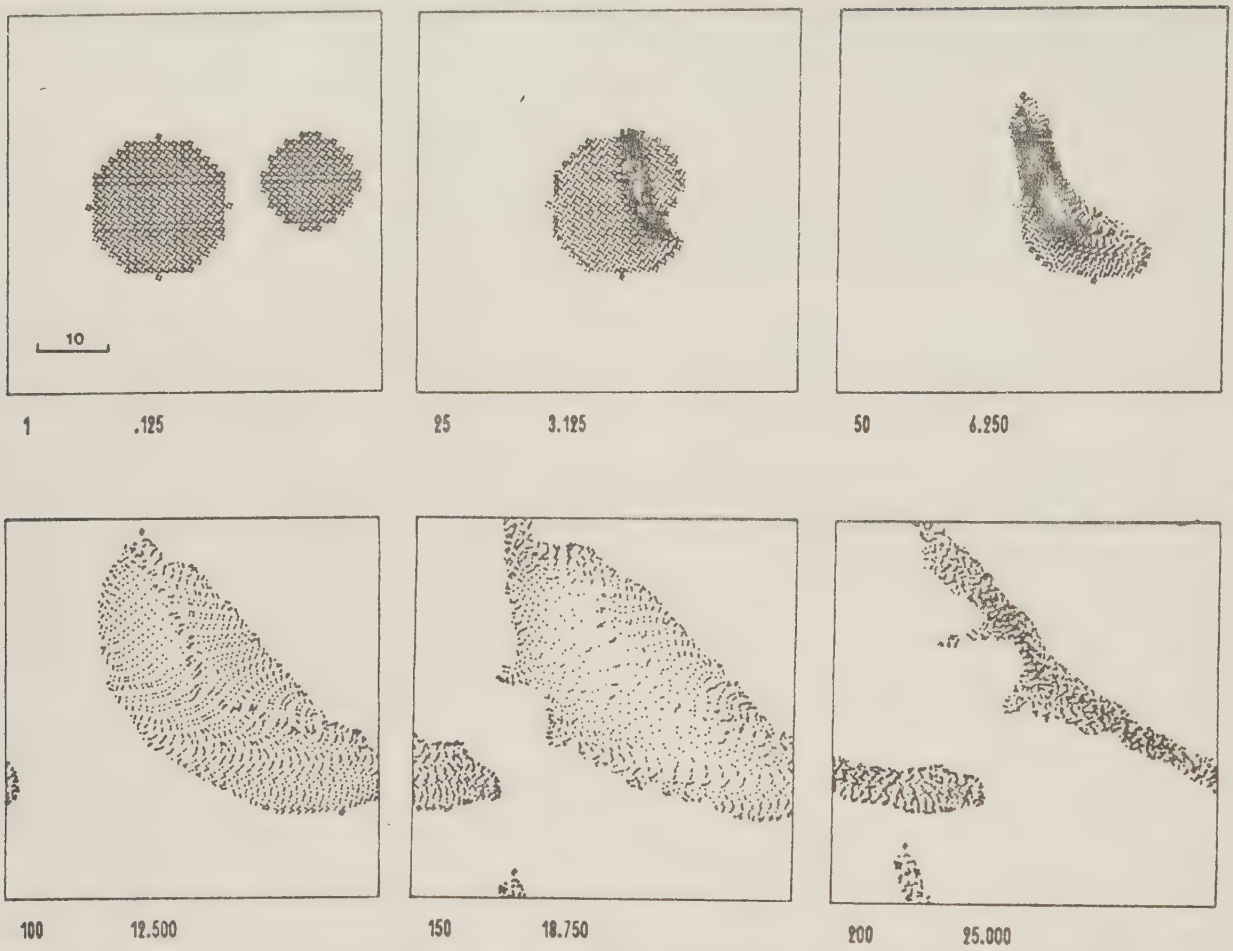


Fig. 1. Two dimensional simulation of cloud collision. Length and time are in dimensionless problem units; in these units, the isothermal sound speed inside the clouds is 1. Below each frame, timestep number and elapsed time are shown; the bar in the first frame gives the spatial scale. The dimensionless mass ratio $\nu = 1/2$, and the reduced impact parameter $\beta = 1/3$. The computational space is wrapped around modulo one frame length to increase the effective available space

from a collision. In all these investigations, however, the cross section and the type of outcome of the collision were either arbitrary or derived from purely geometrical considerations. To our knowledge, the only work to determine by dynamical considerations the outcome of a cloud collision, was that of Stone (1970). This author, however, treated only the case of a head-on collision between clouds of equal masses.

In this section, we analyse the collision process, and attempt to predict, as far as the basic uncertainties and the imperfections of our treatment allow, the outcome of each binary collision. We use the following notations: m_1, m_2, masses of the colliding clouds; m, μ, total and reduced mass; u, relative impact velocity; a, radius of a spherical cloud of mass m; E_{Ki}, E_{Kf} initial and final kinetic energies in the center of mass frame; b, impact parameter; c_0, isothermal sound speed; $M = u/c_0$ isothermal Mach number.

First, simple considerations allow us to put an upper bound on the cross section for coalescence. The orbital angular momentum: $J = u\mu b$, is conserved in the collision, irrespective of its detailed mechanism, if one assumes that there is no externally connected magnetic field, and one neglects flow forces due to the tenuous intercloud medium. If one notes that the isotropic external pressure cannot oppose centrifugal deformation, the latter must be balanced by non-isotropic forces. If gravity is the only such force (we shall come back to this later), we can adopt as an upper bound on J that of the last stable McLaurin ellipsoid (Chandrasekhar, 1969):

$$J^2 \leqq 0.5\, Gm^3 a. \tag{20}$$

Therefore, a necessary condition for coalescence is:

$$b^2 \leqq b_m^2 = 0.5\, Gm^3 a \mu^{-2} u^{-2}\ \mathrm{pc}^2. \tag{21}$$

It is instructive to evaluate by how much the coalescence cross section is reduced relative to the geometrical one:

a) both clouds having the minimum mass considered by MO 77:

$$a_{0l} = 0.48\ \mathrm{pc}, \quad m_{0l} = 0.54\ M_\odot, \quad u = 8\ \mathrm{km\ s^{-1}}.$$

$$b_m^2/a^2 = 1.3\ 10^{-3}. \tag{22}$$

b) For clouds of widely unequal masses $m_1 \gg m_2$

$$b_m^2/a^2 = 0.5\, Gm_1^3 a_1^3 m_2^{-2} u^{-2}. \tag{23}$$

In order to be able to accrete with the geometrical cross section at least the smallest clouds ($m_2 = m_{0l}$), cloud 1 must have a minimum mass $m_1 \geqq 24\ M_\odot$. Thus it appears that coalescence is most effective between clouds of unequal masses.

We now turn to a more detailed study of the collision process. In order to evaluate what fraction of the initial kinetic energy

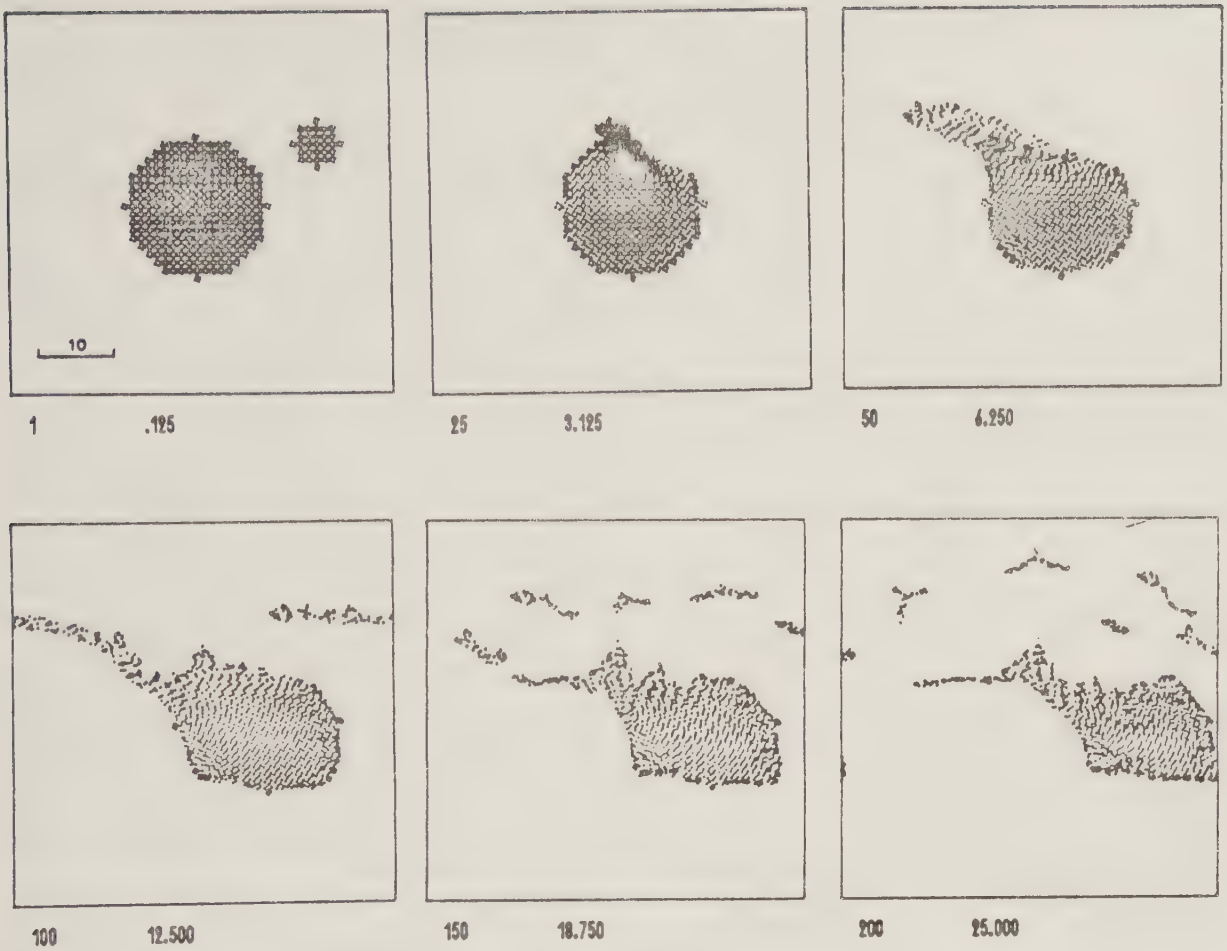


Fig. 2. Same as Fig. 1, with $\nu = 1/8$ and $\beta = 8/9$

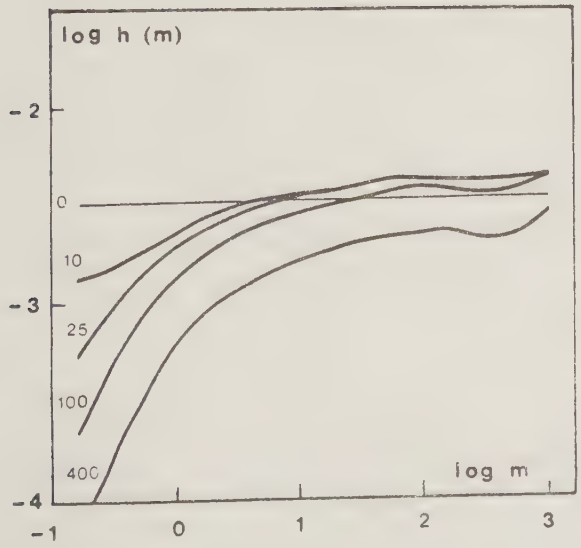


Fig. 3. Time dependent evolution of the cloud spectrum without recycling of the high-end mass flux. Units are 1 $M_\odot$, 1 pc, 1 My

remains at the end of the collision, and how it is shared by the various fragments, we have performed a set of 2-d hydrodynamical simulations. The PIC method (Harlow, 1964) was used, with an isothermal equation of state, and the intercloud medium modelled by a uniform external pressure. The use of an isothermal equation of state is justified by the extremely small radiative cooling timescale. At $(n, T) = (40, 100)$, and using the value of Λ given by Dalgarno and McCray (1972), one finds: $\tau_c = kT/n\Lambda$ of the order of 10^3 yr, much smaller than the collision timescale. Gravity, magnetic field, and mass transfer due to evaporation are not included in the hydrodynamics at this stage. One advantage is that each simulation is characterized by only three dimensionless numbers; i.e. the mass ratio m_2/m_1, the normalized impact parameter b/a_1 and the collision Mach number M. The results of such a calculation can therefore be scaled and used for a variety of cloud sizes.

We first checked that, when the collision Mach number is changed from 3 to 6, the final configurations are similar, except for scaling the velocities by a factor of 2. This is consistent with the results of Kogure (1965), who finds that, when the magnetic field is negligible, and the equation of state isothermal, the elasticity of the collision is nearly independent of the collision

Table 1. Conditions behind SNR blast waves

Q	R pc	v_b km s^{-1}	u km s^{-1}	J^a $M_\odot$ pc^{-1} My^{-1}
0.5	182	135	63	0.26
0.2	150	153	81	0.37
0.1	130	170	97	0.50
0.05	112	186	111	0.64
0.02	93	212	134	0.89

[a] $J=\int \varrho u^2 dt$ behind blast wave

Table 2. Elasticity of cloud-cloud collisions

β ν	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32
1/3	0.05	0.04	0.02	0.01	0.01
2/3	0.28	0.22	0.09	0.02	0.02
8/9	0.44	0.44	0.37	0.15	0.07

velocity. We then computed a series of cases, with $\beta=b/a_1=1/3$, 4/3, 8/9; and $\nu=m_2/m_1=1/2$, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32. Figures 2 and 3 show the results for two selected cases. By inspection of the results, it appears that the final configuration can fairly well be described as follows: a mass m_2 has been torn away from cloud 1, and a mass $2m_2$ is shared between $n_{fr}\simeq 4$ fragments. The collision elasticity $\varepsilon=E_{Kf}/E_{Ki}$, however, depends on the mass ratio and the impact parameter. It is given in Table 1. The final kinetic energy is assumed to be distributed equally among the n_{fr} fragments, and formulae 18–19 can be used to determine whether they eventually escape. This is done conveniently using an interpolation formula derived from Table 1 which gives β as a function of ν and ε.

One can thus know the fraction f of the geometrical cross section which gives rise to coalescence. One can then compute the following contributions to the evolution of the spectrum:

$$\dot{m}_{i,co}=\int_{m_{inf}}^{m_i} f\sigma v m_j g(m_j)dm_j.$$

$$\dot{g}_{j,co}=-\int_{m_j}^{m_{sup}} f\sigma v g(m_i)g(m_j)dm_i$$

$$\dot{m}_{i,fr}=-\int_{m_{inf}}^{m_i}(1-f)\sigma v m_j g(m_j)dm_j.$$

$$\dot{g}_{j,fr}=-\int_{m_j}^{m_{sup}}(1-f)\sigma v g(m_i)g(m_j)dm_i$$

$$\dot{g}_{k,fr}=2n_{fr}^2|g_{j,fr}|$$

$$m_k=2m_j/n_{fr}. \qquad (24)$$

Here, σ is taken to be the cross section of the larger of the colliding clouds, and v, the relative cloud-cloud velocity, is assumed to be independent of masses

This treatment is dissymmetrical in the sense that a collision leading to coalescence (resp. fragmentation) contributes a continuous mass increase (resp. decrease) to the larger of the colliding clouds, while the smaller one simply disappears in both cases. Mass, however, is identically conserved. We have checked the validity of this treatment by repeating the computations described in Kwan (1979): the results agree within 10%.

3.6. Interaction with Blast Waves

In this section, we study the effect of the interaction of SNR blast waves on the cloud warm ionized and warm ($\sim 10^4$ K) neutral envelopes (called WE below).

We start by evaluating the velocity imparted to a standard WE as described in MO 77. We make the following assumptions:

a) formulae valid for a steady flow regime can be used;

b) the post-shock flow is subsonic in the rest frame of the pre-shock gas;

c) the Reynolds number is high enough for the hydrodynamical regime to prevail ($Re\geqq 100$);

d) the resultant force on the WE can be computed as if it retained its initial spherical shape, and stayed at rest in the pre-shock frame. For typical values of SNR radius $R\simeq 100$ pc and cloud radius $a\simeq 5$ pc, assumption a) is marginally valid, depending on the actual structure of the post-shock flow. Assumption b) is valid for remnants having a filling factor $Q>0.2$; when it breaks down, we underestimate the drag force by using a subsonic value for the drag coefficient C_x. The validity of c) cannot be firmly stated. Observation of pulsar scintillation indicates that density fluctuations exist down to a scale of 10^{11} cm (Lang, 1971), but this may not be relevant to hydrodynamical turbulence. Assumption d) is safe in the sense that it breaks down when the envelope is severely distorted or removed which is the conclusion we actually come to. To compute the force exerted on the envelope:

$$F=\tfrac{1}{2}\varrho u^2 C_x \pi a_w^2$$

we need the post-shock density and velocity distributions which depend on conduction and evaporation. To circumvent these uncertainties we only assume that the velocity jump u can be derived from the blast wave velocity v_b (MO 77) using the Hugoniot relations, and that most of the inside mass of the remnant is located in a shell close to the shock radius, moving at a velocity close to the post-shock velocity u, as in the Sedov solution. Then, the total momentum gained:

$$\begin{aligned} P&=\int F dt=\pi a_w^2 C_x \int \tfrac{1}{2}\varrho u^2 dt \\ &=\pi a_w^2 C_x \tfrac{1}{2} u \mathcal{N} \\ &=\pi a_w^2 C_x \tfrac{1}{3} u \tfrac{1}{3} R\bar{\varrho} \\ &=\pi a_w^2 C_x J \end{aligned} \qquad (25)$$

where $\mathcal{N}$ is the column density of post-shock material, and $\bar{\varrho}$ the mean density inside the remnant. Values for $\frac{1}{2}\int \varrho u^2 dt$ are given in Table 2, where we have used a pre-shock adiabatic sound velocity of 83 km s^{-1} corresponding to $T_{h,0}=3\ 10^5$ K. Using $C_x=1/2$, the velocity imparted to a WE by the passage of a blast wave is:

$$\begin{aligned} u_{WE}&=P/m_{WE} \\ &=3\ J/8\ a_{wb}\varrho_w. \end{aligned} \qquad (26)$$

Using the value of P found at $Q=0.5$, $\varrho_w=n_w/30=7.3\ 10^{-3}\ M_\odot$ pc^{-3}, $u_{WE}=6.3$ km s^{-1}, independent of cloud mass. This is to be compared with the radial velocity in a steadily evaporating warm envelope. Using $T_{h,typ}=4\ 10^5$ K, $a_w=2$ pc, the particle flux at the surface is $6\ 10^3$ at cm^{-2} s^{-1}, corresponding to a velocity $u_{ev}=0.24$ km s^{-1}. Thus, the WE is completely swept each time a cloud is overtaken by a SN blast wave. Noting that J (Eq. 25) is 0.5 times the momentum per unit area in the post-shock flow, this con-

clusion remains valid in the post-cooling case, when the cloud is hit by a shell of cold gas. The mean interval between sweepings of the WE is of the order of:

$$\tau_s = (\tfrac{4}{3}\pi S R_{ov}^3)^{-1} = 0.27 \text{ My}$$

The time necessary to reconstitute a WE can be roughly estimated as:

$$\tau_i = \mathcal{N}_w / \Phi$$

where $\mathcal{N}_w = n_w(a_w - a_c)$ is the column density of the WE and $\Phi = \frac{1}{4}\lambda_w \varepsilon_{uv}$ is the U.V. photon flux incident on the surface of the cloud. For small clouds, $a_w - a_c \simeq a_{wb}$; using $\varepsilon_{uv} = 2\ 10^{-15}$ ph cm^{-3} s^{-1}, one finds $\tau_i = 2.8$ My. This is a lower limit because recombinations have not been taken into account. We therefore conclude that the clouds do not in general possess an equilibrium WE. This has already been recognized by McKee and Ostriker.

We now compare the rates of cold mass loss due to ionization and evaporation respectively:

$$\dot{m}_i = 3\ 10^{-2}\ a_i^2\ \frac{\lambda_w}{12 \text{ pc}}\ \varepsilon_{-15}\ M_\odot \text{ My}^{-1}. \tag{27}$$

$$\langle \dot{m}_{ev} \rangle = 1.6\ a\ T_{h6,0}^{5/2}\ M_\odot \text{ My}^{-1}$$
$$= 8\ 10^{-2} a_w M_\odot \text{ My}^{-1}. \tag{28}$$

If, according to the above discussion, we assume that $a_w \simeq a_c$, and if we set $\varepsilon_{-15} = 2$, we see that, for small clouds ($a_c \lesssim 1.5$ pc, $m_c \lesssim 14\ M_\odot$) evaporation proceeds faster than ionisation, acting directly at a_c. Larger clouds build up a WE at a rate $\dot{m}_i$. Since this is swept before reaching equilibrium, $\dot{m}_i$ must be considered as a mass loss rate. We should therefore use a total mass loss rate $\dot{m}_{ev} + \dot{m}_i$, either of these two terms being dominant depending on cloud mass. Since WE's are either swept by cold, dense shells of post cooling SNR's, or evaporating into the hot intercloud in a short time ($0.02\ a_w^2 T_{h6,0}^{-5/2} \simeq 0.4$ My for an ionized fragment having a radius $a_w = 1$ pc), this mass loss is returned to clouds via the accretion of cold SNR shells. Since the rate of the latter process, like $\dot{m}_i$, is $\propto a^2$, the net effects cancel, at least as far as the cloud spectrum is concerned. We have therefore not included it in our equations.

The above analysis assumes a value of the mean free path of UV photons λ_w 12 pc derived by MO 77. Due to clouds alone, if they lose their WE, λ_w is expected to be larger. However, the stripped WE's will enjoy a finite lifetime in the hot intercloud until they are evaporated or swept. We postpone the detailed analysis of the warm ionised and warm neutral fraction of the interstellar medium to a later publication.

3.7. Cloud Spectrum, Summary

Let $\dot{m} = \dot{m}_{ac} + \dot{m}_{co} + \dot{m}_{ev}$, $\dot{g} = \dot{g}_{fr1} + \dot{g}_{co}$

then

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \dot{g} - \frac{\partial}{\partial m}(\dot{m} g). \tag{29}$$

For the system to be complete, the rate of production of cold envelopes $\dot{\varrho}_{ac}$ must be specified. Because the hot intercloud medium has a very small storage capacity ($f_h \varrho_h \simeq 10^{-2} \varrho_c f_c$) we make the assumption that the evaporated mass $\dot{\varrho}_{ev}$ is instantly returned as cold envelopes. Furthermore, since evaporation is the dominant process for the smallest clouds, the outgoing flux at the low end of the mass spectrum is recycled in the same way. Thus:

$$\dot{\varrho}_{ac} = \dot{\varrho}_{ev} + |\dot{m} g|_{m = m_{inf}}$$

This closes the system of equations.

4. Results

4.1. Time Dependent Evolution

We first present the time evolution of a spectrum of clouds evolving due to the processes described in Sect. 3. We list below the values of the parameters adopted for this basic model.

"Ambient" hot intercloud temperature (MO 77):

$$T_{h,0} = 3\ 10^5 \text{ K}$$

"typical" intercloud pressure (MO 77):

$$p_{h,typ}/k = 3.5\ 10^3 \text{ cm}^{-3} \text{ K}$$

cold gas temperature:

$$T_c = 80 \text{ K}$$

cold gas averaged density:

$$\bar{\varrho}_c = 3\ 10^{-2}\ M_\odot \text{ pc}^{-3}\ (\simeq 1 \text{ at cm}^{-3})$$

spectrum boundaries:

$$m_{inf} = 0.1\ M_\odot$$

$$m_{sup} = m_c(P_h, T_c) = 10^3\ M_\odot$$

mean relative cloud velocity:

$$v = 10 \text{ km s}^{-1} \simeq 10 \text{ pc My}^{-1}$$

ratio of mean effective value to ambient value of the evaporative surface tension:

$$\gamma = 10$$

mean number of fragments:

$$n_{fr} = 4.$$

In practice, it was found that assuming a unique number of fragments, as described in Sect. 3.5, led to a minor numerical instability, which was suppressed by distributing the product of fragmentation over two adjacent mass bins, corresponding to $n_{fr} \simeq 3$ and $n_{fr} \simeq 5$. This minor complication is realistic anyway. The mass lost by the spectrum through evaporation and escape at the low end of the mass spectrum is recycled as cold supernova shells, $\dot{\varrho}_{ac}$, as explained in Sect. 3.7. The only net loss is due to massive clouds that grow beyond m_{sup}. The initial conditions are defined by taking the initial $g(m)$ to be proportional to m^{-2}. The results will be displayed in terms of $h(m) = m^2 g(m)$, which is the mass content of the spectrum per unit interval of Log (m). The initial spectrum, for instance, is said to be flat. The evolution of the spectrum is shown in Fig. 3. One can note that the low mass end of the spectrum drops in approximately 20 My; afterwards, the whole spectrum population slowly decreases while retaining its shape. The averaged density drops to $1/e$ its initial value in 550 My. For comparison, we have computed the evolution of the same initial spectrum, taking into account only coalescence with the geometrical cross-section (Fig. 4). The averaged density drops by a factor $1/e$ in 80 My; 7 times faster then in the "basic" model.

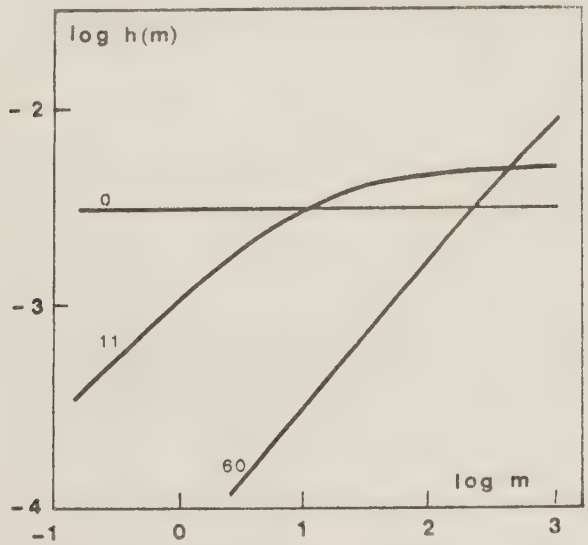


Fig. 4. Similar to Fig. 3, but the only process retained is coalescence with the geometrical cross-section

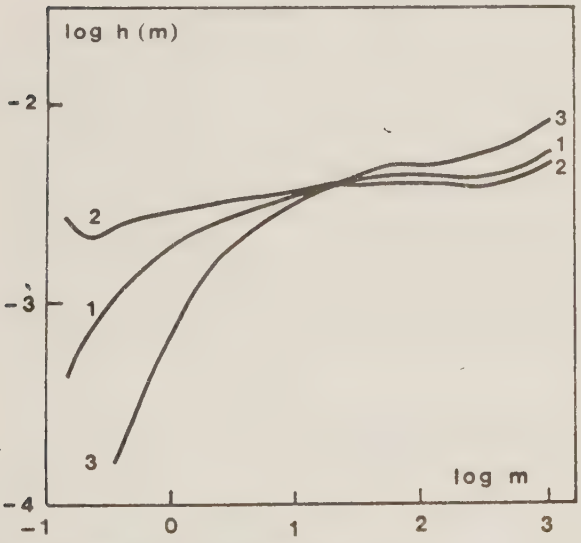


Fig. 5. Effects of changing the mean cloud-cloud velocity. 1. "Standard" model, $v=10$ km s^{-1}. 2. $v=20$ km s^{-1}, fragmentation dominates. 3. $v=5$ km s^{-1}, evaporation dominates at low mass

4.2. Equilibrium Spectra

From now on, we will discuss steady state equilibrium spectra, in which the total mass is conserved. Formally, this is obtained by recycling the mass flux of the clouds that grow beyond the maximum stable mass m_{sup}. The recycling is accomplished in the same way as for evaporation and mass flux at m_{inf}: through $\dot{\varrho}_{ac}$; while this hypothesis might be considered as purely formal, we shall present some justification for it in Sect. 5.2.

Using the "basic" set of parameters, we obtain the equilibrium spectrum shown in Fig. 5. Figure 6 displays the rates (inverse timescales) of the various processes taken into account as a function of cloud mass. For processes that directly add or remove clouds of a given mass (the $\dot{g}$ terms of Eq. 29), this is computed

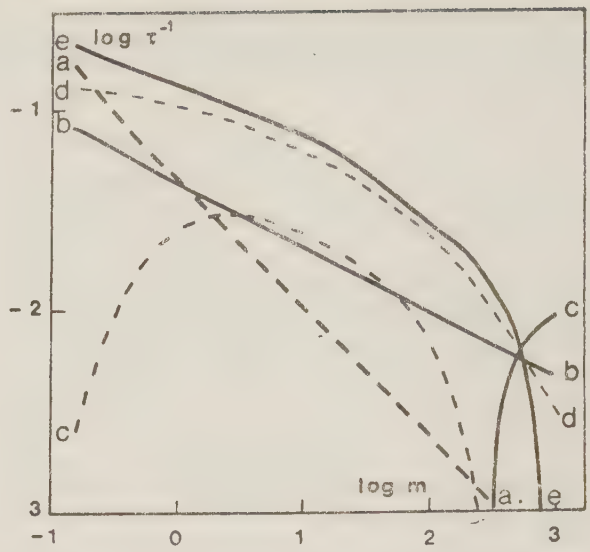


Fig. 6. Characteristic rates of the elementary processes. *a* Evaporation; *b* accretion of frozen SNR envelopes; *c* net mass change due to collisions by smaller cloud; *d* clouds lost in collisions onto larger clouds; *e* production of fragments. Dashed curves denote negative values

as $\dot{g}/g$, while for the $\dot{m}$ terms, we compute $\dot{m}/m$. The following points are noteworthy:

(i) Through most of the spectrum, mass removal by fragmentation is larger than mass addition by coalescence, and the net sum $\dot{m}_{coll}=\dot{m}_{co}+\dot{m}_{fr}$ is negative.

(ii) For $m<200\ M_\odot$ the combined mass removal due to collisions and evaporation is larger than the mass gain due to accretion of cold envelopes: $\dot{m}=\dot{m}_{co}+\dot{m}_{fr}+\dot{m}_{ac}$ is negative, and the resulting "divergence" term: $-\frac{\partial}{\partial m}(\dot{m}g(m))$ (not displayed) is also negative.

(iii) The depopulation of the spectrum resulting from the divergence term is balanced by the small excess of $\dot{g}_{fr}$ (products of fragmentation) over $\dot{g}_{co}$ (clouds undergoing collisions).

(iv) It is only at the high end of the mass spectrum that clouds actually gain from coalescence and accretion of cold envelopes.

(v) The spectrum has a natural cut off at the low mass end.

We thus arrive at a model of diffuse clouds in which the dominant process is not collisional coalescence but a continuous re-shuffling of the spectrum by fragmentation.

We now briefly examine the sensitivity of the results to various input parameters. Figure 5 shows, together with the basic spectrum, the spectra obtained by doubling (20 km s^{-1}) and halving (5 km s^{-1}) the cloud-cloud velocity v. When the velocity is increased, the re-shuffling due to fragmentation dominates the "divergence" term in the low mass range, and a flat spectrum results. Conversely, with $v=5$ km s^{-1}, low mass clouds are depleted, mostly by evaporation. We note that the following values for the one dimensional velocity dispersion of clouds have been derived:

$\sigma=5.7\pm0.9$ km s^{-1} (Crovisier, 1978); $\sigma=6.4\pm0.9$ km s^{-1} (Falgarone and Lequeux, 1973).

Since for a gaussian distribution, the collision frequency is $4\pi^{-1/2}\sigma nS$, a value $v\simeq10$ km s^{-1} should be adopted to model the local interstellar medium. We have also tested the sensitivity of the results to two other parameters by (i) reducing γ from 10 to 1, (ii) increasing n_{fr} from 4 to 10. The resulting spectra are shown in

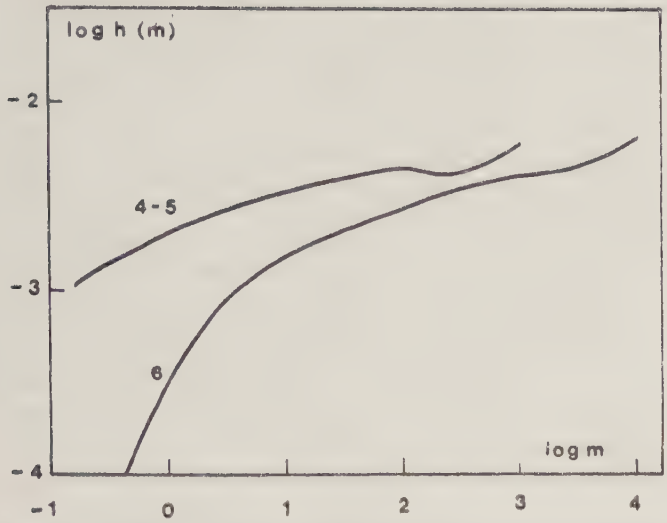


Fig. 7. Effect of changing γ (effective surface tension enhancement); n_{fr} (mean number of fragments): the spectra of models 4 and 5 are virtually identical. Effect of increasing the upper mass limit of diffuse clouds to $10^4\ M_\odot$: curve 6

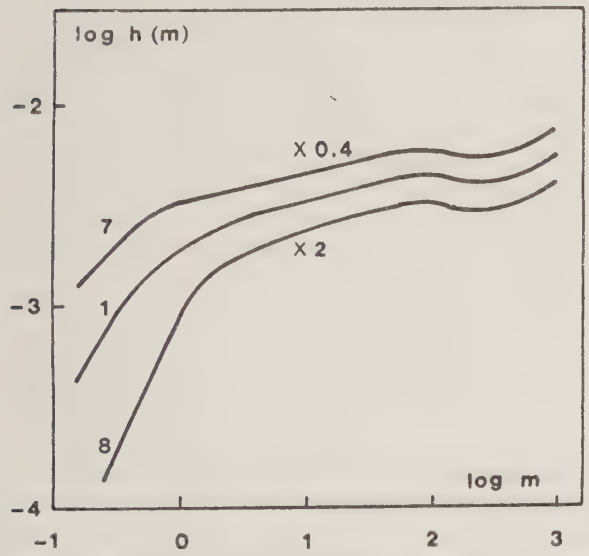


Fig. 8. Effect of changing the mean density of the diffuse phase. Curve 7: $\varrho_d = 10^{-2}\ M_\odot\ \mathrm{pc}^{-3}$ ($n_H = 0.3\ \mathrm{cm}^{-3}$). Curve 8: $\varrho_d = 10^{-1}\ M_\odot\ \mathrm{pc}^{-3}$ ($n_H = 3\ \mathrm{cm}^{-3}$). The spectra have been scaled by the indicated amount to facilitate the comparison

Fig. 7 (they happen to be practically identical). Both these changes increase the importance of fragmentation, and as expected, increase the population of low mass clouds. One can note, however, that rather large changes of these parameters do not change drastically the results. We have crudely taken into account the possibility that the clouds might be supported against collapse by the magnetic field, so that the maximum stable mass might be larger than indicated by formula (5). We have increased the maximum stable mass to $10^4\ M_\odot$, without, however, modifying the mass-radius relationship (see Fig. 7). Finally, we have computed equilibrium spectra with an averaged density $3\times$ or $0.3\times$ the basic value. The importance of two-body processes (collisions) relative to one-body processes (evaporation, accretion) varies accordingly, and so does the relative population of low mass clouds, as discussed above (Fig. 8). The properties of the basic model and its variants are summarized in Table 3. We have listed θ defined in Sect. 3.3., which embodies all the information relevant for the computation of the intercloud properties in the MO 77 formalism, λ the mean free path between clouds, and F the mass flux at the high end of the mass spectrum.

Table 3. Summary of integral properties of spectra

Model number	Parameter varied	θ pc^{-2}	λ pc	F $M_\odot\ \mathrm{pc}^{-3}\ \mathrm{My}^{-1}$
1	basic	5.1(−3)	71	9.7(−5)
2	$v=20$	1.0(−2)	48	1.5(−4)
3	$v=5$	2.7(−3)	97	9.8(−5)
4	$\gamma=1$	6.2(−3)	66	1.1(−4)
5	$n_{fr}=10$	6.1(−3)	67	1.2(−4)
6	$m_{sup}=10^4$	1.2(−3)	158	8.9(−5)
7	$\varrho=10^{-1}$	2.2(−2)	18	1.0(−3)
8	$\varrho=10^{-2}$	1.1(−3)	250	1.3(−4)

θ is a quantity related to evaporation, defined in Sect. 3.3
λ is the mean free path between clouds on a line of sight
F is the mass flux at the high end of the spectrum

One can note that θ, which depends mostly on small clouds, reflects the changes at the low mass end of the spectrum, while F is remarkably constant in models 1–6. The fact that F varies roughly as ϱ^2 in models 7 and 8 simply reflects the fact that collisional processes dominate, although this begins to break down when the density is decreased by a factor 10. The relevance to a Schmidt type law of star formation is, at the present stage, superficial, because no account has been taken of the feed-back of θ into intercloud properties.

5. Discussion

The previous section presented variations around a "basic" model in which we adopted the values used by MO 77. In this section, where we wish to make comparisons with observed values in the solar neighbourhood, we shall use the results of model 8, whose averaged H I density is close to the observed value (Burton and Gordon, 1978):

$\varrho = 10^{-2}\ M_\odot\ \mathrm{pc}^{-3}$, $n_H = 0.3\ \mathrm{cm}^{-3}$.

5.1. Observable Properties of the Cloud Spectrum

Observations and models of the cloud spectrum are often parametrized using the index $\beta = d(\log g(m))/d\log m$. Scheffler (1967), from a statistical analysis of interstellar extinction, deduces $\beta = -2 \pm 0.2$ for cloud masses $m \leqq 5\ 10^3\ M_\odot$. Penston et al. (1969), from the strength of the Ca^+ K-line, find $\beta = -1.5$ for $20\ M_\odot \leqq m \leqq 2\ 10^3\ M_\odot$. Hobbs (1974), performing a similar analysis of KI absorption, finds a distribution of column densities $\propto \mathcal{N}^{-2}$, corresponding to $\beta = -2$ if spherical geometry and constant density are assumed for the clouds. Thus, observations indicate a range of values $\beta \simeq -1.5$ to -2. The spectrum of model 8 can be respresented, between 10 and 10^3 solar masses,

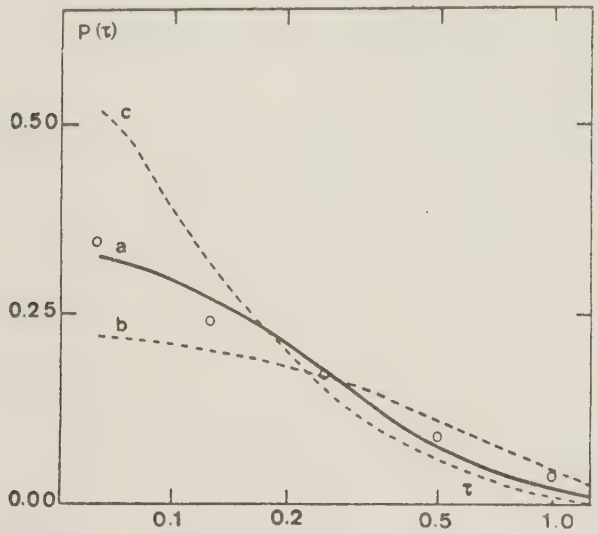


Fig. 9. The probability distribution $P(\tau)$ of 21 cm optical depths on a line of sight at $b=90°$. Open circles: observed values (Crovisier and Kazès, 1978); *a* model 8; *b* power law spectrum, $\beta=-1.5$, $0.5 \leqq m/M_\odot \leqq 1000$; *c* same as *b*, but $\beta=-2$; spectrum used in MO 77

by a power law with $\beta=-1.9$. All previous collisional models predict a spectral index β in the range -1.5 to -2 (see Kwan, 1979). The value of β is therefore not a decisive test.

Some information about the low mass end of the spectrum has been found by Schwarz and Wesselius (1978). From 21 cm absorption measurements, they conclude that the local H I does not exhibit structure below 0.5 pc scalelength. We note that, with the parameters we have adopted, a cloud radius 0.57 pc corresponds to 1 $M_\odot$, in the range of the low mass turnover.

Yet another piece of information on the local interstellar medium comes from the probability distribution of 21 cm absorption features. Crovisier and Kazes (1978) have used the results of available 21 cm absorption surveys to derive $P(\tau)$, such that the mean number of absorption components with optical depth $\geqq\tau$ on a line of sight at latitude b is $P(\tau)/\sin b$. Crovisier (1978a) compares the observed $P(\tau)$ with that computed using the MO 77 cloud spectrum. He finds a large discrepancy, but part of it is due to the value $n_H=1$ cm^{-3} adopted by MO 77. We have scaled the MO 77 cloud spectrum ($\beta=-2$, $0.5\ M_\odot \leqq m \leqq 10^3\ M_\odot$) to $n_H=0.3$ cm^{-3} and computed the corresponding $P(\tau)$. We have performed a similar calculation for a power law spectrum having $\beta=-1.5$, and for our model 8 (see Fig. 9). An equivalent half-thickness for the H I disk of 100 pc has been used (Guibert et al., 1978). This computation assumes pressure equilibrium, spherical geometry, and constant cloud temperature. It can be criticized in view of the observed correlation of spin temperature T_S with optical depth (Lazareff, 1975; Dickey et al., 1978). However, one can note that, if the temperature of the clouds is changed while maintaining pressure equilibrium, the points of a log $P(\tau)-\log\tau$ diagram are displaced along lines of slope $-2/5$. In the domain $\tau<0.5$, where the $T_s(\tau)$ dependence is the largest, (cf. the analytical fit of Dickey et al.), the observed $P(\tau)$ relation can be represented by a power law with an exponent $-1/2$, sufficiently close to $-2/5$. In other words, the $P(\tau)$ relationship can, to a good approximation, be interpreted as if the cloud temperature were uniform. Figure 9 shows that the MO 77 spectrum has an excess of small clouds, while the $\beta=-1.5$ spectrum has a deficiency of small clouds. The good agreement of model 8 with the observed $P(\tau)$ has been obtained without fine-tuning parameters; however, the quality of the fit is probably partly due to chance, considering the uncertainties of both observed quantities and model parameters.

Finally, the mean free path λ between clouds in model 8 is 250 pc. 21 cm absorption studies yield values of λ of 400 pc (Radhakrishnan and Goss, 1972), 250 pc and 100 pc respectively for the data of Lazareff (1975) and Dickey et al. (1978) analyzed by Crovisier (1978a). These values depend both on the detection sensitivity and on the degree of decomposition of absorption profiles into components. Optical absorption studies yield values of 220 pc using the K I λ 7699 line (Hobbs, 1974) or 100 pc using the Na I D line (Hobbs and Zuckerman, 1972). A detailed comparison must await a more complete analysis in a model including the warm neutral and warm ionized phases.

5.2. Star Formation Rate

We discuss here the possible relationship between the diffuse phase of the interstellar medium and the rate of star formation. We explicitly make the following reasonable, but not firmly established, assumptions. Molecular clouds are formed from diffuse clouds that grow beyond the maximum stable mass m_c. Matter in the molecular phase has a lifetime τ_m, at the end of which a fraction r forms new stars, and the unused fraction is dispersed and returned to the diffuse phase. We call ϱ_d and ϱ_m the averaged densities in the diffuse and molecular phase. The lifetime τ_d of the diffuse phase against formation of molecular clouds is ϱ_d/F. If r is small compared to unity, then the lifetime of the interstellar medium as a whole against star formation τ is large compared to both τ_m and τ_d (irrespective of their ratio), and a quasi-equilibrium prevails between the diffuse and molecular phases:

$$F=\varrho_d/\tau_d \simeq \varrho_m/\tau_m$$

and the rate of star formation is:

$$\dot{\varrho}_*=rF.$$

One can note that, within this framework, the rate of star formation can be found if F (which depends on properties of the diffuse phase) and r are known. Given F, the value of τ_m determines the amount of molecular matter present. Also note that the above scheme is independent of the detailed fate (collisions, etc....) of molecular clouds. One might object that our model predicts molecular cloud masses ($\sim 10^3\ M_\odot$) far smaller than those deduced from recent CO surveys in the inner regions of our Galaxy. But Rowan-Robinson (1979) finds that Lynds clouds, located within 1 kpc of the Sun, have a mean mass $1.5\ 10^3\ M_\odot$. Maybe collisional growth plays a larger role in the inner parts of the Galaxy. One case where an estimate of r can be attempted is that of ϱOph. Encrenaz et al. (1975) estimate the total mass of ϱOph to be 2000 $M_\odot$. Falgarone (1979), from an analysis of CO, infrared, continuum, and carbon recombination lines, concludes that 4 stars of spectral type B3 or earlier are present in ϱOph. Scalo (1978) estimates that, for $1 \leqq M/M_\odot \leqq 10$, there is an "universal" cluster IMF, similar to the "field" IMF, but that below 1 $M_\odot$ they probably differ. This is why we have computed the total stellar mass by integrating the IMF down to only 1 $M_\odot$. Using the IMF given by Scalo (1978) (but excluding stars below 1 $M_\odot$), this corresponds to a total mass of stars formed: 180 $M_\odot$.

Another way to estimate r is to observe the H I + H II mass associated with a young cluster. Gordon et al. (1968) have attempted to detect H I around 28 young clusters, and find unconclusive results. Raimond (1966) finds that the H I mass associated with NGC 2244 is $1.5\ 10^5\ M_\odot$. Using the photometry of Johnson (1962) and the extinction values of Dufour and Lee (1970), we count 8 stars having $M_v \lesssim -2.8$ (B1 or earlier). Integrating the IMF down to $1\ M_\odot$, this corresponds to $1.5\ 10^3\ M_\odot$, in agreement with Raimond's conclusion. In the case of NGC 2264, Raimond finds an associated H I mass of $1.8\ 10^4\ M_\odot$. Using the photometry of Wolker (1956) one finds 16 stars brighter than $M_v = 0$ (B8 or earlier). The less massive stars apparently have not yet reached the main sequence. Integration of the IMF leads to a total stellar mass of $200\ M_\odot$. Assuming that some of the B stars may not yet be on the main sequence, the same procedure can be repeated, based on the 6 visible O stars, leading to an estimate of $3000\ M_\odot$ for the stellar mass. This procedure can be criticized on the grounds that when different groups of observed stars are considered, the total mass derived using a standard IMF changes. However, for various reasons (sequential formation, time to reach the main sequence) the raw IMF observed in a very young cluster might be biased against low mass stars. We summarize our tentative estimates for r:

ϱ Oph: 9%; NGC 2244: 1%; NGC 2264: 1–17%.

We note that Vrba (1977) gives estimates in a similar range; R CrA: $8\ 10^{-4}$; L 1551: 3%; L 1630: 4%; ϱ Oph: 14%; NGC 1333: 19%.

Rowan-Robinson (1979) derives from the infrared luminosity of star forming molecular clouds a value $r \simeq 5\%$. This may be an underestimate because of his use of a Salpeter mass function up to $100\ M_\odot$, while the initial mass function is steeper for stellar masses above $2\ M_\odot$ (Lequeux, 1979), and also because star formation may be incomplete. On the other hand, it may be an overestimate if the low mass stars reach the main sequence from above, as indicated by some models (Larson, 1977).

Cohen and Kuhi (1979) recently derived an estimate $r \simeq 10\%$ which is probably more reliable than the ones above, because it is based on direct detailed observation of low mass stars, and does not rest on an assumed IMF. We shall adopt this value.

The rate of star formation in the 10 kpc ring is estimated to be $5\ 10^{-3}\ M_\odot\ \mathrm{pc}^{-2}\ \mathrm{My}^{-1}$ (Miller and Scalo, 1979). We adopt the following values for disk surface densities from Guibert et al. (1978): $\sigma_m = \sigma_d = 3\ M_\odot\ \mathrm{pc}^{-2}$, where the factor 1.4 takes He into account, and only the cold (cloud) component of the diffuse phase has been retained. First, independently from the mechanisms of mass exchange between the phases, the lifetime of a molecular cloud can be estimated as: $\tau_m = r\sigma_m\ \dot{\sigma}_x = 60$ My, and because $\sigma_m \simeq \sigma_d$, the lifetime of the diffuse phase against the formation of molecular clouds must have a similar value. Secondly, we compare the "observed" value of the flux from diffuse to molecular phase: $r^{-1}\dot{\sigma}_x = 5\ 10^{-2}\ M_\odot\ \mathrm{pc}^{-2}\ \mathrm{My}^{-1}$ with the one predicted by our model. Based on the value of F for model 8, assuming that $F \propto \varrho^2$, and that the density profile for the gas is a gaussian having $\langle |z| \rangle = 100$ pc, we deduce a star formation rate

$$\dot{\sigma}_x = r \int F(\varrho(z))\,dz = 2.6\ 10^{-4}\ M_\odot\ \mathrm{pc}^{-2}\ \mathrm{My}^{-1}$$

which is 20 times less than the observed value. We noted in Sect. 4.2 that, for values of ϱ_g less than $10^{-2}\ M_\odot\ \mathrm{pc}^{-3}$ (which is the maximum density at $z = 0$) the dependence $F(\varrho)$ tends to be linear rather than quadratic. This can raise the predicted value of $\dot{\sigma}_x$ to only $4\ 10^{-4}\ M_\odot\ \mathrm{pc}^{-2}\ \mathrm{My}^{-1}$. However, if $F \propto \varrho^2$ for $\varrho > 10^{-2}\ M_\odot\ \mathrm{pc}^{-3}$, large scale density inhomogeneities might increase the mean star formation rate by a factor $\langle \varrho^2 \rangle / \langle \varrho \rangle^2$. Such inhomogeneities have been observed in our own Galaxy with masses up to $10^6\ M_\odot$ (Perry and Helfer, 1972). Viallefond et al. (1980) observe in M 101 that star formation is associated with H I complexes having masses of the order of $3\ 10^7\ M_\odot$ and densities of $\sim 3\ \mathrm{cm}^{-3}$ ($\varrho = 0.1\ M_\odot\ \mathrm{pc}^{-3}$). These inhomogeneities might raise F to values compatible with the observed star formation rate.

6. Conclusion

We have presented a self-consistent model for the spectrum of H I clouds in the solar neighbourhood. It is based upon a detailed analysis of the interactions of the clouds amongst themselves and with the hot intercloud medium of MO 77. The model predicts a mass distribution of clouds which is in good agreement with observations. In its present form, it makes no predictions concerning the "warm" (formerly called "intercloud") phase of the interstellar medium, which is observed in the 21 cm line. The model predicts a rate of formation of molecular clouds. When combined with reasonable estimates of the efficiency of star formation and of the large scale clumpiness of the interstellar medium, this leads to a star formation rate and a lifetime of molecular clouds which is in agreement with the observations.

Acknowledgements. We thank J. Audouze, J. Lequeux, J. L. Puget and S. White for critical reading of the manuscript. We also thank the referee (C. F. McKee) for bringing to our attention the work of Cohen and Kuhi.

References

Burton, W.B., Gordon, M.A.: 1978, *Astron. Astrophys.* **63**, 7
Chandrasekhar, S.: 1969, Ellipsoidal figures of equilibrium, p. 78, Yale University Press
Chevalier, R.A.: 1974, *Astrophys. J.* **188**, 501
Cohen, M., Kuhi, L.V.: 1979, *Astrophys. J. Suppl.* **41**, 743
Cowie, L.L., McKee, C.F.: 1977, *Astrophys. J.* **211**, 135
Crovisier, J.: 1978a Thesis, Université de Paris VII
Crovisier, J.: 1978b, *Astron. Astrophys.* **70**, 43
Crovisier, J., Kazès, I.: 1978, The large scale characteristics of the Galaxy, W. B. Burton Ed. Reidel, Dordrecht
Dalgarno, A., McCray, R.A.: 1972, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **10**, 383
Dickey, J.M., Salpeter, E.E., Terzian, Y.: 1978, *Astrophys. J. Suppl.* **36**, 77
Dufour, R.J., Lee, P.: 1970, *Astrophys. J.* **160**, 357
Elmegreen, B.G.: 1979, in Large scale characteristics of the Galaxy, p. 284, W. B. Burton Ed. Reidel, Dordrecht
Encrenaz, P.J., Falgarone, E., Lucas, R.: 1975, *Astron. Astrophys.* **44**, 73
Falgarone, E.: 1979, Thesis, Université Paris VII
Falgarone, E., Lequeux, J.: 1973, *Astron. Astrophys.* **25**, 253
Field, G.B., Saslaw, W.C.: 1965, *Astrophys. J.* **142**, 583
Field, G.B., Hutchins, J.: 1968, *Astrophys. J.* **153**, 737
Gordon, C.P., Howard, W.E. III, Westerhout, G.: 1968, *Astrophys. J.* **154**, 103
Guibert, J., Lequeux, J., Viallefond, F.: 1978, *Astron. Astrophys.* **68**, 1
Harlow, F.H.: 1964, Methods in computational physics, Alder, B. Fernbach, S., Rotenberg, M., Academic Press, New York
Hobbs, L.M., Zuckerman, B.: 1972, *Astrophys. J.* **171**, 17

Hobbs, L.M.: 1974, *Astrophys. J.* **191**, 395
Hughes, M.P., Thompson, A.R., Colvin, R.S.: 1971, *Astrophys J. Suppl.* **23**, 323
Johnson, H.L.: 1962, *Astrophys. J.* **136**, 357
Jura, M.: 1976, *Astron. J.* **81**, 178
Kogure, T.: 1965, *Publ. Astron. Soc. Japan* **17**, 385
Kwan, J.: 1979, *Astrophys. J.* **229**, 567
Lamb, H.: 1945, Hydrodynamics, § 262 and 275, Dover, New York
Lang, K.R.: 1971, *Astrophys. J.* **164**, 249
Larson, R.B.: 1977, IAU *Symp.* 75, T. de Jong and A. Maeder, Eds. Reidel, Dordrecht
Lazareff, B.: 1975, *Astron. Astrophys.* **42**, 25
Lequeux, J.: 1979, *Astron. Astrophys.* (in press)
McCray, R., Snow, T.P. Jr.: 1979, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **17**
McCrea, W.H.: 1957, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **117**, 562
McKee, C.F., Ostriker, J.P.: 1977, *Astrophys. J.* **218**, 148
Miller, C.E., Scalo, J.M.: 1979, *Astrophys. J.* (in press)
Oort, J.H.: 1954, *Bull. Astron. Inst. Neth.* XII No. **455**, 177
Penston, M.V., Munday, V.A., Stickland, D.J., Penston, M.J.: 1969, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **142**, 355
Perry, J.F.W., Helfer, H.L.: 1972, *Astrophys. J.* **174**, 341
Radhakrishnan, V., Goss, W.M.: 1972, *Astrophys. J. Suppl.* **24**, 161
Raimond, E.: 1966, *Bull. Astron. Inst. Neth.* **18**, 191
Rowan-Robinson, M.: 1979, *Astrophys. J.* **234**, 111
Scalo, J.M.: 1978, in *Protostars and Planets*, T. Gehrels Ed. University of Arizona, Press, Tucson, USA
Scoville, N.Z., Hersh, K.: 1979, *Astrophys. J.* **229**, 578
Scoville, N.Z., Solomon, P.M., Sanders, D.B.: 1978, in IAU *Symp.* 84, W. B. Burton Ed. Reidel, Dordrecht
Scheffler, H.: 1967, *Z. Astrophys.* **66**, 33
Schwarz, U.J., Wesselius, P.R.: 1978, *Astron. Astrophys.* **64**, 97
Spitzer, L. Jr.: 1978, Physical processes in the interstellar medium, J. Wiley and sons, New York
Stone, M.E.: 1970, *Astrophys. J.* **159**, 293
Taff, L.G., Savedoff, M.P.: 1973, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **164**, 357
Verschuur, G.L.: 1970, in *Interstellar Gas Dynamics*, IAU *Symp.* 39, Habing, H. J. Ed. Reidel, Dordrecht
Viallefond, F., Allen, R.D., Goss, E.M.: 1980 (preprint)
Vrba, F.J.: 1977, *Astron. J.* **82**, 198
Walker, M.F.: 1956, *Astrophys. J. Suppl.* **2**, 365

DEUXIEME PARTIE

EVOLUTION D'UN RESTE DE SUPERNOVA DOMINE PAR L'EVAPORATION DES NUAGES INTERSTELLAIRES

Astron. Astrophys. 00, 1–5 (1981)

ASTRONOMY AND ASTROPHYSICS

Research Note

Self Similar Evolution of Evaporative Supernova Remnants

J. P. Chièze[1,2] and B. Lazareff[1,3]

[1] Institut d'Astrophysique de Paris, 98bis Boulevard Arago, F-75014 Paris, France
[2] Service de Physique Neutronique et Nucléaire, Centre d'Etudes de Bruyères-le-Châtel, B. P. No. 561, F-92542 Montrouge Cedex, France
[3] Département de Radioastronomie, Observatoire de Meudon, F-92190 Meudon, France

Received May 23, Accepted September 4, 1980

Summary. The expansion of a supernova remnant into an inhomogeneous medium of evaporating clouds can be idealized as a self-similar problem.

The equations are set up and solved in the two limiting cases of negligible and dominant large scale conductivity, in the presence of an ad hoc external intercloud density $\varrho(r)=\Gamma r^{-5\,3}$, with $\Gamma=0$ as a limiting case. While the detailed structure depends on Γ, the global properties such as the expansion law and the total mass are to a large extent independent from this parameter, and agree with previous approximate results of McKee and Ostriker (1977).

The limitations of our formal solutions are briefly discussed.

Key words: Interstellar medium – supernova remnants – gas dynamics – self-similar problems

1. Introduction

The Sedov blast wave (Sedov, 1959) is the best known of a class of self similar problems, characterized by the fact that, out of the m parameters (including radial and time coordinates), m-1 are dimensionally independent. Its validity conditions are closely met during the intermediate phase of the expansion of a supernova remnant (SNR) into a cold, uniform density interstellar medium, and it has been widely used in discussing the dynamics of SNRS or as a benchmark test for more sophisticated studies.

However, theoretical studies (McKee and Ostriker, 1977) and observational evidence (Long and Helfand, 1979) suggest that evaporation of matter from cold dense clouds embedded into a more tenuous intercloud medium might strongly affect the evolution of SNRS. McKee and Ostriker have derived the expansion law of such evaporation dominated SNRs, using an approximate treatment that ignores the detailed internal structure of the remnant.

The purpose of this paper is to show that, under certain circumstances, the expansion of an evaporative SNR is a problem of the self similar type, and to derive the corresponding solutions. In Sects. 2 and 3, the equations are written down and solved in the adiabatic and isothermal cases respectively, and in Sect. 4, the applicability of the solutions to real astrophysical situations is discussed.

Send offprint requests to: B. Lazareff (Mendon)

2. The Adiabatic Case

Basic Assumptions

In the present section, we study the problem of the expansion of a supernova remnant into a two-component interstellar medium comprising a uniform distribution of cold clouds with negligible filling factor, and a cold intercloud medium of negligible density. The solution to this problem is obtained as a limiting case of a more general problem where an appropriately chosen density law for the intercloud medium is introduced. If the number density of clouds is large enough to be considered uniform, evaporation adds matter to the remnant's interior at a rate proportional to $T^{5\,2}$.

Let $\varrho(r,t)$ be the density of hot gas inside the remnant, $u(r,t)$ its velocity, and $\varepsilon(r,t)$ the internal energy density per unit volume. The unsaturated evaporation rate can be written down as:

$$\dot{\varrho}_{ev}=\Omega(\varepsilon/\varrho)^{5\,2}. \tag{1}$$

We assume in this section that conduction can be neglected as far as the large scale evolution of the remnant interior is concerned. At the first glance, this may seem contradictory with our taking into account evaporation; the validity of this assumption depends on the size distribution of the clouds, and will be discussed in Sect. 4. Our problem has four dimensional parameters: r; t; Ω, the evaporation parameter; and E_0, the energy deposited by the supernova. Therefore, the solution can be expressed in terms of functions of the unique dimensionless combination:

$$x=r\Omega^{1\,10}E_0^{-1.10}t^{-3\,5} \tag{2}$$

so that:

$$\varrho=\Omega^{1\,2}E_0^{1\,2}t^{-1}f(x) \tag{3}$$

$$u=\Omega^{-1\,10}E_0^{1\,10}t^{-2\,5}g(x) \tag{4}$$

$$\varepsilon=\Omega^{3\,10}E_0^{7\,10}t^{-9\,5}h(x). \tag{5}$$

Since the radius R_S of the remnant's edge corresponds to a constant value of x, we can already recover the result derived by Mekee and Ostriker, that R_S varies as $t^{3\,5}$ and ϱ as $R_S^{-5.3}$.

Physical Equations

The hydrodynamical equations are:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial r}\right)\varrho+\varrho\ \mathrm{div}\ u\ =\Omega(\varepsilon/\varrho)^{5\,2} \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial r}\right)u+\frac{1}{\varrho}\frac{2}{3}\frac{\partial \varepsilon}{\partial r}=-\frac{u}{\varrho}\Omega(\varepsilon/\varrho)^{5/2} \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial r}\right)\varepsilon+\frac{5}{3}\varepsilon\,\mathrm{div}\,u=\frac{1}{2}u^2\Omega(\varepsilon/\varrho)^{5/2}. \tag{8}$$

The terms at the right hand side of the velocity and energy lagrangian equations arise because, in the comoving frame, the evaporated gas has non-zero momentum and energy. Alternatively, we could have written down the equations in conservative eulerian form; then the momentum and total (internal + kinetic) equations would have no source term. Cloud crushing and sweeping by the blast wave are neglected.

Using Eqs. 2–5, we can, in the usual way, reduce Eqs. 6–8 to ordinary differential equations:

$$[g-(3/5)x]f'+(2g/x+g'-1)f=(h/f)^{5/2} \tag{9}$$

$$[g-(3/5)x]g'-(2/5)g+(2/3)h'f=-(g/f)(h/f)^{5/2} \tag{10}$$

$$[g-(3/5)x]h'-(9/5)h+(5/3)(2g/x+g')h=(1/2)g^2(h/f)^{5/2} \tag{11}$$

where a prime denotes derivation with respect to x.

Scale Transformation

The dimensionless Eqs. (9–11) are invariant under the following transformation, which we shall call a normalization:

$$\left.\begin{aligned} x&\to\lambda x\\ f&\to\lambda^5 f\\ g&\to\lambda g\\ h&\to\lambda^7 h\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

We write down some integrals that we shall use later, which are related respectively to mass, internal energy, kinetic energy, and radiative cooling (for $2\,10^5 < T < 10^7$ K)

$$m=4\Pi\int_0^{x_s} fx^2dx \qquad [\lambda^8] \tag{13}$$

$$i=4\Pi\int_0^{x_s} hx^2dx \qquad [\lambda^{10}] \tag{14}$$

$$k=4\Pi\int_0^{x_s}\frac{1}{2}fg^2x^2dx \qquad [\lambda^{10}] \tag{15}$$

$$c=4\Pi\int_0^{x_s} f^{2.6}h^{-0.6}x^2dx\ [\lambda^{11.8}] \tag{16}$$

where x_s is the value of x at the boundary and the power of λ in square brackets indicates how each integral scales in a normalization. In a subset of solutions that differ only by the normalization only one must be retained to obtain the physical solution using Eqs. (2–5). It is defined by the condition that E_0, besides being a dimensional constant with dimension of energy, is actually the total energy. We shall say that this solution corresponds to the actual normalization, and in the following, all quantities belonging to the actual normalization will be denoted by capital letters. With that convention, the actual normalization satisfies:

$$I+K=1. \tag{17}$$

In order to be acceptable, a solution to Eqs. 9–11 must have no energy source or sink at the origin. Then, the total energy within a sphere corresponding to a constant value of the dimensionless radius x, must be constant; and since evaporation locally conserves the total (internal + kinetic) energy, the energy flux through such a sphere must vanish. This leads to the following first integral:

$$h/f=(1/2)g^2[3.5-g/x]\cdot[5g/3x-3/5]. \tag{18}$$

It implies: $9/25<g/x<3/5$.

Boundary Conditions

At a free boundary, the pressure must vanish. One might think that the particle velocity must equal the boundary velocity; but this is true only if mass is conserved, which is not the case. In order to be able to start the integration from the outer edge with definite boundary conditions, we modify the initial problem by introducing an outside density of pressureless gas. To do this without introducing an extra dimensional parameter, we notice that there is a unique combination of the problem parameters which has the dimension of density and is independent of time:

$$r^{-5/3}\Omega^{1/3}E_0^{2/3}$$

we therefore assume that an outside density:

$$\varrho(r)=\delta r^{-5/3}\Omega^{1/3}E_0^{2/3} \tag{19}$$

is present, where δ is a dimensionless parameter. The outer boundary is then a strong adiabatic shock, and the Hugoniot equations imply:

$$\left.\begin{aligned} F(x_s)&=4\delta X_s^{-5/3}\\ G(X_s)&=(3/4)(3X_s/5)\\ H(X_s)&=(9/32)(3X_s/5)^2F(X_s).\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Because X_s is not known beforehand, we seek the solution in the arbitrary normalization where $\delta=1$, so that:

$$f(1)=4\delta X_s^{-5.3}X_s^{-5}=\varphi. \tag{21}$$

The two other boundary conditions retain the same form.

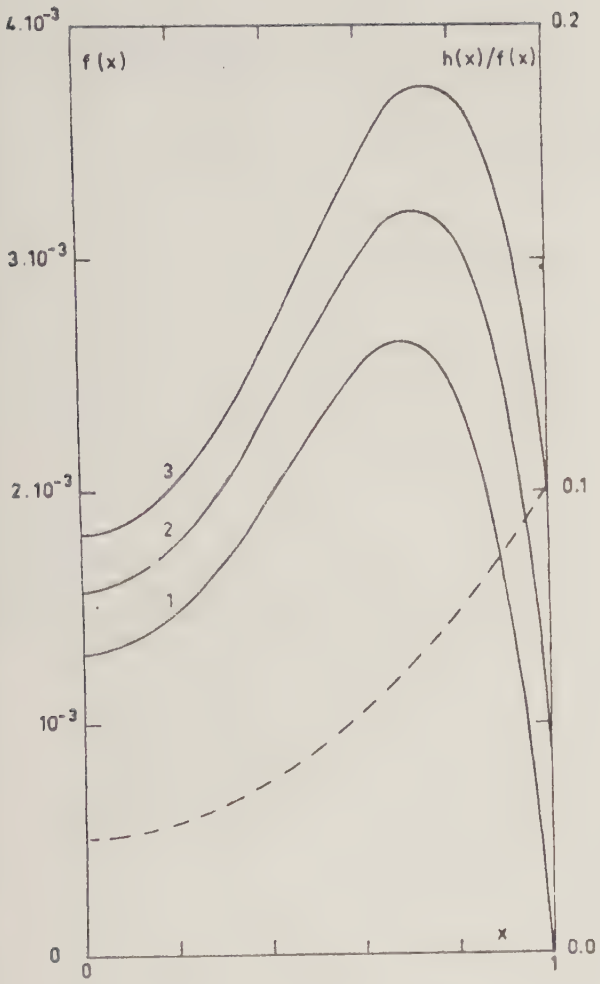
Solutions

Given a trial value of φ, the integration of Eq. 9–11 is performed inward and the resulting density profiles are drawn on Figs. 1a–1b.

When φ tends to zero, the solution converges to a limiting solution, which corresponds to the case of vanishing outside density. Representative density profiles are shown on Fig. 1a, in the normalization where $x_s=1$. The velocity profile is not shown because it is almost linear: $9/25\leqq g(x)/x\leqq 9/20$, with the extreme values being reached at the center and at the edge. Values of several dimensionless numbers are given in Table 1, from which one can deduce the physical values:

$$\left.\begin{aligned} r_s&=\Omega^{-1/10}E_0^{1/10}t^{3/5}X_s\\ M&=\Omega^{1/5}E_0^{4/5}t^{4/5}M\\ \mathcal{I}&=E_0I\\ \mathcal{C}&=a\Omega^{0.82}E_0^{1.18}t^{0.28}C\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

is the value of the radiative losses, assuming the approximate cooling function $=6.2\,10^{-19}T^{-0.6}$ erg cm^3 s^{-1}, valid in the range 2.10^5 K $< T < 10^7$ K. The *numerical constant a* takes the values $1.1\,10^{34}$ if all quantities in (22) are expressed in the cgs system, or $2.6\,10^9$ if basic units of 1 $M_\odot$, 1 pc, 10^6 yr are adopted (ISM UNITS). Of course, all the above analysis breaks down when the



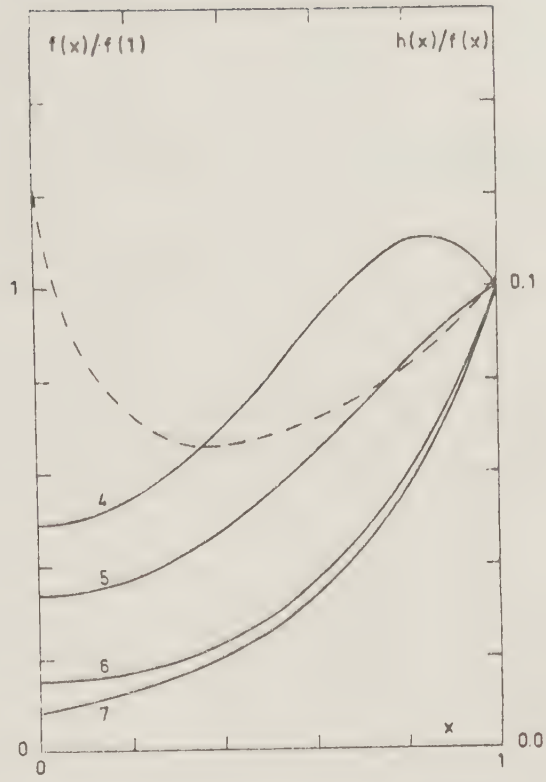


Fig. 1a and b. Radial profiles of the dimensionless density for adiabatic models. Dotted lines represent the profile of specific internal energy in the two limiting cases of negligible external density (model 1) and negligible evaoration (model 7)

Table 1. Properties of adiabatic models

Models	Φ	δ	X_s	M	I	C	α	β
1	1.0(-6)	2.63(-5)	2.01	2.14	0.56	3.51(-1)	2.89	1.17
2	1.0(-3)	2.07(-2	1.94	2.14	0.56	3.64(-1)	2.79	1.06
3	2.0(-3)	3.47(-2)	1.88	2.15	0.56	3.91(-1)	2.71	1.05
4	5.0 -3)	6.19(-2)	1.80	2.25	0.56	4.94(-1)	2.64	1.03
5	1.0(-2)	8.86 -2)	1.71	2.38	0.56	6.76(-1)	2.58	1.04
6	1.0(-1)	2.21 -1)	1.39	3.37	0.56	3.38(0)	2.50	1.13
7	1.0(0)	4.85(-1)	1.10	5.25	0.56	2.17(+1)	2.48	1.16

cooling timescale ($\propto t^{-0.28}$) becomes comparable with the age of the remnant. Table 1 also gives the value of:

$$\alpha = \frac{dr_s}{dt} / \langle c_{150} \rangle \qquad (23)$$

$$= (3 X_s 5) \cdot (3 M 2 I)^{1/2}$$

$$\beta = [\int \varrho^{2.6} \varepsilon^{-0.6} r^2 dr] / [M^{1.6} \langle \varrho \rangle^{-0.6}] \qquad (24)$$

where α is the ratio of the expansion velocity to the mean interior isothermal sound speed, and β the enhancement of radiative losses due to inhomogeneities.

For large ($\gtrsim 1$) values of φ, (and δ), the solution normalized to $x_s = 1$ and scaled by the value of $f(1)$ converges to a limiting form (see Fig. 1b) which corresponds to the case of a blast wave into a $r^{-5.3}$ density distribution with no evaporation. Ω is no longuer a "good" parameter; if we make the substitution:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma &= \delta \Omega^{1.3} E_0^{2.3} \\ \varrho(r) &= \Gamma r^{-5.3} \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

and if we trade Ω for Γ as a problem parameter, the case of negligible evaporation can be either solved from the start, or deduced by suitable transformations from a solution of Eqs. (9–11) with large enough δ.

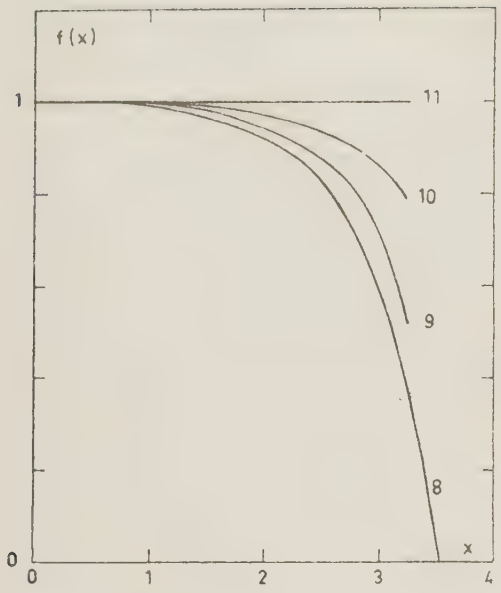
Since this problem is not interesting by itself in the present context, we simply give the expression for the remnant radius:

$$r_s = 0.89\, \Gamma^{-3.10} E_0^{3.10} t^{3.5}.$$

Inspection of Figs. 1a–b and Table 1 shows that although the shape of the density profile changes drastically, the global properties of the remnant do not change much, especially I, α, and β.

3. The Isothermal Case

In this section, we examine the case where the thermal conduction is large enough that the temperature is uniform throughout the remnant. The solution of the problem proceeds along lines similar



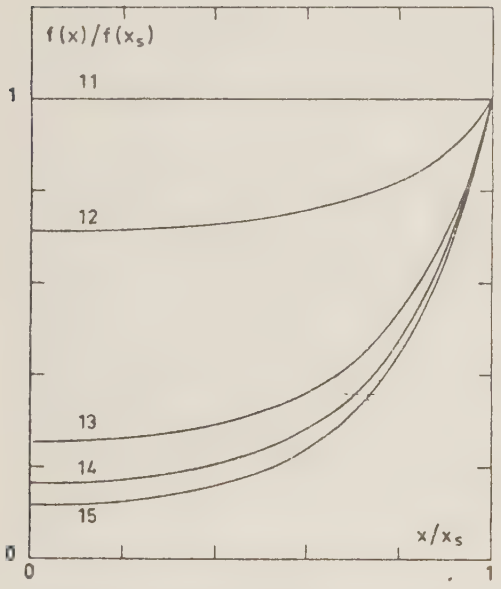


Fig. 2a and b. Same as Fig. 1, for isothermal models. Model 8 is the limiting case of negligible external density, while model 15 corresponds to negligible evaporation

Table 2. Properties of isothermal models

Model	z	δ	X_s	M	J	C	α	β
8	0.2695	1.48(-3)	1.08	1.80	0.49	2.23 -1	2.94	...
9	0.2668	1.73(-2)	1.95	1.83	0.49	2.42 -1	2.78	1.01
10	0.2624	2.58(-2)	1.89	1.86	0.49	2.62 -1	2.72	1.00
11	0.2592	3.31 -2	1.86	1.93	0.50	2.94 -1	2.69	1.00
12	0.2560	4.38 -2	1.76	1.98	0.52	3.56 -1	2.63	1.00
13	0.2194	1.10(-1	1.54	2.42	0.53	9.73 -1	2.50	1.13
14	0.1854	1.74(-1)	1.44	2.91	0.54	2.2(+0)	2.46	1.20
15	0.0532	1.55(0)	0.77	10.3	0.55	4.08+2)	2.44	1.26

to those of the preceeding section, and we merely indicate the modifications. Let z be the constant value of the ratio hf, then Eqs. (9–11) are replaced by:

$$[g-(3/5)x]f'-(2/3)x+g'-1)=z^{5/2} \tag{27}$$

$$[g-(3/5)x]g'-(2/5)g+(2/3)zf'/f=-(g/f)z^{5/2}. \tag{28}$$

Boundary Conditions

Only the first two of the jump conditions at the outer boundary can be used, because conduction carries an a priori unknown energy flux. Also, the value of z is a priori unknown, and the solution will not be first found in the actual normalization, thus:

$$[3x_s/5-g(x_s)]f(x_s)=(3x_s/5)(x_s/X_s)^5\delta X_s^{-5/3} \tag{29}$$

$$2z/3=(3x_s/5-g(x_s))g(x_s) \tag{30}$$

Compared to Eq. (20), there are as many unknowns, and one equation less. The integration cannot therefore be started from the edge. It can be shown that the solution of (27–28) cannot have a free inner surface at finite radius, similar to those occurring in certain cases of blast or detonation problems. Assuming that near the center, the solution is regular, i.e. $f\to f_0$ and $g/x\to a_0$ (which we shall verify to be true) then Eq. (27) implies: $z^{5/2}=(3a_0-1)f_0$. Setting $f_0=1$, integrations can be performed outwards for various values of $a_0>1.3$.

Solutions

Each integration is terminated when condition (30) is met. The actual normalization is found according to (17), and (29) then determines the value of δ. The value of z scales to $z=(X_s/x_s)^2z$. When a_0 decreases to 1.3, solutions dominated by the outside density are found, while the pure evaporative solution is found for $a_0\simeq 0.50558$. Representative density profiles are shown on Fig. 2a (small values of δ) and 2b (large values of δ, scaled by the boundary value $f(x_s)$. Like in the adiabatic case, one finds that the shape of the density profile varies drastically, while many global properties are rather insensitive to the value of δ (see Table 2). Finally, when δ is large enough (>1) that evaporation is negligible, the expansion law can be rewritten:

$$r_s=0.88\,\Gamma^{3/10}E_0^{3/10}t^{3/5}. \tag{31}$$

4. Discussion

Numerical Values

The evaporation parameter Ω defined in (1) is related to the distribution function $n(m)$ of clouds per unit volume and mass interval through:

$$\Omega=5.8\,10^{-12}\,\Theta=1.2\,10^{-12}\,\Sigma^{-1} \tag{32}$$

$$\Theta=\int n(m)a(m)dm \tag{33}$$

where $a(m)$ is the radius of a cloud. Θ and Σ are moments of the cloud distribution defined respectively in Chièze and Lazareff (1980) and McKee and Ostriker (1977). The unsaturated evaporation rate of Cowie and McKee (1977) has been used, and ISM units ($1\,M_\odot$, 1pc, $1\,\mathrm{My}=10^6$ yr) are adopted. Chièze and Lazareff found, for the local interstellar medium, $\Theta=1.1\ 10^{-3}$ pc^{-2}, so

that $\Omega = 6.4\ 10^{-15}\ M_\odot\ \mathrm{pc}^{-8}\ \mathrm{My}^4$. Useful conversion factors are: $10^{51}\ \mathrm{erg} = 5\ 10^7\ M_\odot\ \mathrm{pc}^2\ \mathrm{My}^{-2}$, $T/1\ K = 50\ (\varepsilon/\varrho)/(1\ \mathrm{pc}^2\ \mathrm{My}^{-2})$, and $\varrho/1\ M_\odot\ \mathrm{pc}^{-3} = n_H/30$.

Since X_s is virtually the same for isothermal and adiabatic models without external density, the expansion law for both cases can be written:

$$r_s = 3.1\ 10^2\ t^{3/5}. \tag{34}$$

The temperature and edge temperature for the isothermal and adiabatic cases respectively are:

$$T = 3.2\ 10^5\ t^{-4/5}\ \text{(iso)} \tag{35}$$

$$T = 4.8\ 10^5\ t^{-4/5}\ \text{(ad)} \tag{36}$$

while the remnant mass is:

$$\mathcal{M} = 3.8\ 10^3\ t^{4/5}\ M_\odot\ \text{(iso)} \tag{37}$$

$$\mathcal{M} = 4.5\ 10^3\ t^{4/5}\ M_\odot\ \text{(ad)} \tag{38}$$

and its mean density:

$$\langle\varrho\rangle = 3.0\ 10^{-5}\ t^{-1}\ M_\odot\ \mathrm{pc}^{-3}\ \text{(iso)} \tag{39}$$

$$\langle\varrho\rangle = 3.6\ 10^{-5}\ t^{-1}\ M_\odot\ \mathrm{pc}^{-3}\ \text{(ad)} \tag{40}$$

Validity at Early Times

The validity of the self similar solution starts when the evaporated mass dominates the ejected mass. If we assume that this condition is met when $\mathcal{M} = 50\ M_\odot$, the validity of the (isothermal) solution starts at: $t = 4.5\ 10^{-3}$ My, $r_s = 12$ pc. One can expect to have about ten clouds with masses of the order of 1 $M_\odot$ [small clouds are dominant is the integral (33)] within such a radius, so that the treatment of the cloudy interstellar medium as uniform just starts to be justified.

Isothermal to Adiabatic Transition

We compare the time scales for energy transport by conduction within the remnant with the age of the remnant. From (22):

$$\dot{\mathcal{M}}/\mathcal{M} = (4/5)\ t^{-1} \approx \langle\dot{\varrho}_{ev}\rangle/\langle\varrho\rangle. \tag{41}$$

The evaporation rate can be written:

$$\dot{\varrho}_{ev} = (16\ \Pi\mu\kappa\ 25\kappa)\Theta \tag{42}$$

where μ is the mean mass per particle and κ the conduction coefficient. We can roughly estimate the timescale for energy exchange through a sphere encompassing half of the remnant's volume:

$$t_{cond} = 2^{-4.3}\ r_s^2 \varrho k/\mu\kappa. \tag{43}$$

Combining (41), (42), and (43):

$$t_{cond}/t = (2^{2.3}/5)\Theta r_s^2 \approx \Theta r_s^2. \qquad (2^{2/3}\ \Pi/5)$$

Using the numerical values found above, and formulae (22), we find that $t_{cond} = t$ when $r_s = 30$ pc, which occurs when the age $t = 2.10^{-2}$ My, and the temperature $T = 7.3\ 10^6$ K. Younger remnants tend to be isothermal, while older remnants tend to be adiabatic.

5. Relevance of Self Similar Solutions

The purpose of this paper is not to give a detailed theory of the evolution of supernova remnants, but rather to describe some analytical solutions of an idealized problem. Thus, we shall only mention a few of the problems that stand between our solutions and reality.

a) Conversion of the kinetic energy of ejected matter into internal energy (possibly by standing bow shocks on clouds).

b) Ion-electron equipartition, both in ejected and in evaporated matter.

c) Saturation of conduction.

d) Inhibition of conduction by magnetic fields.

e) Possible role of ion thermal conduction.

f) Cloud crushing and sweeping.

1980

References

Chièze, J.P., Lazareff, B.: Astron. Astrophys. 91, 2[illegible]

Cowie, L.L., McKee, C.F.: 1977, *Astrophys. J.* **211**, 135

Long, K.S., Helfand, D.J.: 1979, *Astrophys. J.* **234**, L77

McKee, C.F., Ostriker, J.P.: 1977, *Astrophys. J.* **218**, 148

Sedov, L.I.: 1959, Similarity and dimensional methods in mechanics, Academic Press, New York

J. P. Chièze and B. Lazareff: Self Similar Evolution of Evaporative Supernova Remnants
J. P. Chièze and B. Lazareff: Self Similar Evolution of Evaporat ve Supernova Remnants

TROISIEME PARTIE

MODELE DYNAMIQUE DE

NEBULEUSE PLANETAIRE

Section 1

INTRODUCTION

Les nébuleuses planétaires doivent leur nom à William Herschel. La première fut découverte par Charles Messier en 1764 : la nébuleuse de l'Haltère, cataloguée M27. Parmi les travaux systématiques d'observation des nébuleuses planétaires, on peut relever ceux du groupe de l'observatoire de Lick : Campbell, Curtis, Moore, et Wright, publiés en 1918, et les travaux de Wilson au cours des années 1950. Ces objets sont remarquables par leur spectre, composé essentiellement de raies d'émission, mais surtout par leur forme annulaire, qui donne lieu à de nombreuses variantes plus ou moins pittoresques.

On admet généralement le scénario suivant pour l'évolution des nébuleuses planétaires : une étoile de 1 à 4 $M_\odot$ perd son enveloppe au terme de la deuxième ascension de la branche des géantes. Le cœur de carbone-oxygène, qui n'a plus qu'une mince enveloppe d'hydrogène et d'hélium, n'a presque plus de réserves de combustible. Il se contracte, et sa température augmente. Il ionise alors l'enveloppe précédemment éjectée. C'est l'étape où la nébuleuse planétaire est observable. Enfin, lorsque le noyau a épuisé son énergie interne et nucléaire, il devient une naine blanche dégénérée, et se refroidit à rayon constant. Ce scénario est motivé et justifié par les arguments suivants :

- la distribution spatiale et cinématique des nébuleuses planétaires les apparente à la vieille population I.
- le taux de naissances de N.P. est, aux incertitudes près, égal d'une part au taux de naissance des naines blanches, d'autre part à la mortalité des étoiles de 1 à 4 $M_\odot$.
- la vitesse d'éjection de l'enveloppe, qui ne peut être qu'inférieure à la vitesse d'expansion actuellement observée, est très inférieure à la vitesse de libération du noyau dans son état présent. Par contre, elle est comparable à la vitesse de libération d'une géante rouge, ce qui suggère que la nébuleuse résulte de l'éjection d'une enveloppe de géante rouge.
- le domaine occupé par les noyaux de N.P. dans le diagramme H-R semble dessiner un trajet évolutif qui se raccorde à celui du refroidissement des naines blanches.

Les travaux théoriques relatifs aux nébuleuses planétaires se rangent dans trois grandes catégories : a) évolution de l'étoile parente et en particulier éjection de l'enveloppe; b) spectroscopie, structure d'ionisation, et abondances dans la nébuleuse; c) évolution dynamique de la nébuleuse. Concernant l'éjection de la nébuleuse, au moins trois

théories sont en lice : éjection continue par un vent stellaire, instabilité pulsationnelle de la double couche de combustion H-He, instabilité dynamique de l'enveloppe (à laquelle la recombinaison de l'hydrogène confère une énergie totale positive). Les études spectroscopiques visent à identifier l'origine des raies observées, dont certaines sont pratiquement impossibles à observer dans les conditions de laboratoire, et à en expliquer quantitativement les intensités. Ce type d'étude est à la fois un banc d'essai pour la physique atomique, et un moyen d'accéder indirectement à l'émission dans l'ultraviolet lointain de l'étoile excitatrice. Les modèles dynamiques, quant à eux, tentent d'expliquer la répartition spatiale observée de la matière ionisée, et sa structure cinématique telle que nous la révèlent les spectres à haute résolution. Les bases physiques en seraient probablement plus simples que celles des modèles spectroscopiques -trois équations fondamentales-, si on savait mieux quels sont les termes source (d'énergie, d'impulsion) qui doivent figurer au second membre des équations.

Dans ce qui suit, nous proposons un modèle dynamique de nébuleuse planétaire. L'exposé est divisé en sections. La section 2 est une revue des observations existantes de nébuleuses planétaires, où nous avons mis l'accent sur celles qui sont en rapport direct avec le modèle proposé. Il faut toutefois garder présent à l'esprit que, à terme, la distinction entre propriétés " spectroscopiques" et "dynamiques" devrait disparaître quand existeront des modèles complets capables de rendre compte de toutes les observations. La section 3 passe en revue les modèles dynamiques publiés, dans le but d'en faire une étude critique (autrement dit, les dénigrer et les éliminer). Une telle étude est instructive, car, si un modèle a pu être invalidé par des observations ultérieures à son élaboration, il contient souvent des idées intéressantes qui peuvent être reprises avec profit. Au terme de la section 3, nous présentons le schéma d'un modèle qui tient compte des dernières données d'observation. Mais, pour étayer sa validité, certains détails doivent être précisés, et un calcul détaillé doit être effectué. C'est l'objet des sections suivantes. La section 4 précise certaines lois physiques locales qui entrent en jeu dans le modèle et plaide pour l'adoption d'un système d'unités cohérent dans les calculs dynamiques.

La section 5 est une étude de la structure d'un choc en géométrie sphérique, dans le cas où l'équipartition des températures électronique et ionique n'est pas assurée par le choc lui-même, et où la conduction thermique entraîne la présence d'un précurseur électronique. On y montre qu'en géométrie sphérique, le précurseur peut constituer un puits d'énergie pour le gaz d'électrons. Dans la section 6, on étudie la structure de la zone de transition entre deux régions de températures très dissemblables, en équilibre de pression. Dans une telle transition, la conduction thermique et les pertes radiatives sont en compétition, et le sens du transfert de masse -évaporation ou condensation- dépend du mécanisme dominant. On établit la relation entre le flux de masse et le flux conductif à l'interface dans les divers régimes. Dans la section 7, nous exposons la mise en équations du problème et quelques aspects techniques du traitement numérique. La section 8 contient l'exposé des résultats, leur discussion, et leur confrontation aux observations. Enfin, dans la section 9, on tire les conclusions de l'étude, et on évoque quelques perspectives de travail futur.

Section 2

REVUE DES OBSERVATIONS

Any comprehensive discussion of the mechanism of the planetary nebulae must necessarily take into account three distinct lines of evidence—first, the observed forms as shown by direct photographs; second, the remarkable spectrographic results secured by Messrs. Campbell and Moore showing doubled, inclined, and distorted lines: and third, the equally remarkable results secured by Mr. Wright pointing to variations in the condition or in the distribution within the planetary of the different kinds of matter composing it. From the photographic results alone it is evident that we have to do with structures of extraordinary complexity, and the puzzles of the mechanics of the planetary nebulae seem three-fold as bewildering when the attempt is made to fit in as well the almost inexplicable pecularities shown by the spectrographic results. The aberrant wisps and striae and other minor formal irregularities in such complex structures as the Ring Nebula in *Lyra*, N.G.C. 7009, N.G.C. 7026, and others, would seem to defy all attempts to analyze the details, whatever hypothesis may be adopted regarding the general form of the structure as a whole. Excluding from consideration such minor and apparently haphazard irregularities, and investigating solely the larger details of the forms assumed, is it possible to postulate any general form or forms, which shall be mechanically plausible, and to which the planetaries, or a considerable proportion of the planetaries, will more or less closely conform? In details, each planetary may well be a law unto itself, but even a casual inspection of the forms of the seventy-nine planetaries of which illustrations have been given would seem to indicate certain general similarities of structure.

H.D.Curtis, Publications of the Lick Observatory, vol XIII (1918)

1. But et étendue de la revue

Dans cette section, nous allons rappeler un certain nombre d'observations qui vont constituer la pierre de touche des modèles existants et de celui que nous proposons. Le format et l'étendue de cette revue sont déterminés par deux considérations. D'une part, il est hors de question de faire une revue complète des observations ayant trait aux nébuleuses planétaires. En particulier, nous laissons presque entièrement de côté le problème de la structure d'ionisation des composants mineurs, ne retenant que les observations donnant lieu à une détermination de paramètres physiques tels que n_e, T_{eff}^* , ou la structure cinématique. D'autre part, le faible nombre de nébuleuses bénéficiant d'un ensemble complet d'observations, et la disparité des propriétés des objets, doivent nous mettre en garde contre l'adoption de paramètres "typiques". Une telle démarche pourrait en effet nous conduire à échafauder un modèle qui reproduirait un objet chimérique aux propriétés hétéroclites. Nous préférons sélectionner un petit nombre d'objets pour lesquels on peut rassembler à partir de la littérature un ensemble relativement complet d'observations.

2. Structure spatiale

La nébuleuse planétaire (N.P) "idéale" se présente dans le domaine visible sous l'aspect d'un anneau circulaire en émission, au centre duquel se trouve une étoile qui semble étonnamment peu lumineuse par rapport à la nébuleuse qu'elle excite. Mais bon nombre de N.P. ont un aspect plus ou moins pittoresque, qui réjouit l'observateur curieux et cause le désarroi du modéliste. Citons par exemple l'Hélice (NGC 7293), l'Esquimo (NGC 2392) ou bien l'Haltère (NGC 6853). Il semble toutefois que de tels errements soient le fait d'objets âgés, de grand rayon, alors que les individus jeunes se plient nettement mieux à la norme. Une modélisation simple de la brillance de surface conduit à l'interpréter comme résultant d'une coquille de gaz ionisé dont l'épaisseur relative $\Delta r/\langle r\rangle$ est de l'ordre de l'unité. Voir par exemple ATHERTON et al. (1978), REAY et WORSWICK (1977), PHILIPS, REAY, WORSWICK (1977). Notons, en anticipant sur le paragraphe suivant, que WEEDMAN (1967) trouve une corrélation négative entre l'épaisseur relative et la vitesse d'expansion. La cavité centrale peut éventuellement être absente, $(\Delta r/\langle r\rangle = 2)$ comme dans le cas de NGC 3568 (PHILIPS, REAY, WORSWICK, 1979).

Les images monochromatiques obtenues dans les raies d'émission de divers ions ont des tailles différentes ; les images les plus petites sont celles des ions ayant le plus fort potentiel d'ionisation, comme par exemple NeV. Cette stratification est particulièrement bien illustrée par la comparaison des images électronographiques obtenues par Reay et Worswick pour NGC 6720 (Fig. 1).

Notons enfin deux caractéristiques de la structure spatiale inexpliquées par les modèles : forme ellipsoïdale avec maximum de brillance aux extrémités du petit axe, et présence fréquente d'un second anneau extérieur à l'anneau principal.

3. Structure cinématique

WRIGHT (1918) et CURTIS (1918) ont été les premiers à remarquer qu'en plaçant la fente d'un spectrographe à haute dispersion suivant un diamètre d'une N.P., chaque raie était dédoublée en une petite ellipse. C'est Wilson qui, il y a plus de trente ans, a entrepris une étude systématique de la cinématique des N.P. (WILSON, 1948, 1949, 1952). En ce qui nous concerne, le principal résultat, outre la mesure de la séparation entre les composantes "bleue" et "violette" : Δv , est la progression de Δv, qui décroît avec le potentiel d'excitation χ nécessaire pour que la raie considérée soit émise (χ_{n-1} pour une raie excitée collisionnellement, et χ_n pour une raie de recombinaison). En rapprochant cette corrélation de la vitesse radiale avec l'état d'ionisation de la corrélation signalée précédemment de l'état d'ionisation avec les dimensions transversales de l'image, on déduit l'existence d'un gradient de la vitesse radiale, qui croît vers l'extérieur. Un exemple de corrélation $\chi - \Delta v$, reproduit de WILSON (1949) est donné Fig. 2. On peut remarquer que la corrélation est loin d'être parfaite. Les raies de HI (recombinaison) ; [O III] 4959 + 5007 ; et [Ne III] 3867 + 3967 donnent en général des valeurs de Δv en bon accord, c'est cette valeur commune qui est prise comme mesure de la vitesse d'expansion.

Dans certains cas, les séparations de vitesse radiale Δv des divers ions ne se rangent pas suivant une progression régulière. La Table I donne trois exemples remarquables.

TABLE 1

	MgI	[OI]	[SII]	[OII]	[NII]	H	HeI	[OIII]	[NeIII]	[NeV]
IC 418 (1)	37	50	35	21 a	23 a	0	0	0	0	
NGC 6210 (1)				71	71	42	38	43	42	
NGC 2392 (2)				106				105	114	0

(1) : WILSON, 1949

(2) : WILSON, 1948

a : valeurs tirées de WILSON, 1952 ; dans WILSON, 1949, ces deux raies sont données comme non dédoublées.

On peut faire à propos des valeurs de la Table 1 les remarques suivantes :

a) IC 418 et NGC 6210, les raies de [OII] et [NII] d'une part ; H, HeI, [OIII], [NeIII] d'autre part, forment deux groupes de dédoublements ΔV bien marqués, alors que dans le cas de NGC 2392, [OII], [OIII] et [NeIII] présentent des séparations très voisines autour de 110 km/s.

b) Le comportement singulier des raies de [NeV] dans NGC 2392 se retrouve dans d'autres N.P.

c) Dans le cas de IC 418, les raies de [SII] (qui peut être présent hors de la région H^+), ainsi que de MgI et [OI] (qui ne peuvent être présents que hors de la région H^+) indiquent une vitesse d'expansion nettement plus élevée que celle des espèces qui coexistent avec H^+. C'est probablement la signature du choc externe qui précède un front d'ionisation de type D.

4. Distances

Les distances des N.P. sont en général assez mal connues. Si M est la masse d'hydrogène ionisé, r le rayon, et d la distance de la N.P., les observables facilement déterminées sont la brillance surfacique $I_{H\beta} \propto M^2 r^{-5}$ et le rayon angulaire $\theta = r/d$. Il manque une équation. La méthode de Schlowskii revient à supposer la masse ionisée constante. On peut également fournir l'information manquante à partir d'une mesure spectroscopique de la densité électronique. MACIEL et POTTASCH (1980) montrent que l'hypothèse $M =$ constante doit être abandonnée, et donnent une liste d'une vingtaine de N.P. dont la distance peut être estimée sans faire d'hypothèse sur la structure interne de l'objet. Ils montrent que la masse ionisée croît avec le rayon de la N.P., ce qui n'a rien de surprenant. Les distances sont en général révi-

sées en baisse.

5. Densités électroniques

Elles sont déduites du rapport d'un doublet de structure plus fine dont le niveau supérieur est dédoublé. C'est le plus souvent [OII] $\lambda\lambda$ 3726-3729 qui est utilisé. POTTASCH (1980) montre que la détermination spectroscopique de est en assez bon accord avec la valeur déduite du flux et de la distance (quand cette dernière est bien connue), et que les inhomogénéités de densité ne sont pas très importantes.

6. Caractéristiques de l'étoile excitatrice

Jusqu'à une époque récente, seule la partie "visible" du spectre pouvait être directement observée. Or, pour les étoiles très chaudes, le domaine visible tombe entièrement dans la partie Rayleigh-Jeans du spectre. HARMAN et SEATON (1966) déterminent les températures effectives T_{eff} et les luminosités L (en fait L/d^2 tant que la distance n'a pas été déterminée par ailleurs) des étoiles excitatrices par la méthode de ZANSTRA (1931). Cette méthode revient essentiellement à déterminer deux températures de couleur, entre le visible et respectivement le continu de Lyman de HI ($\lambda < 912$ A) et le continu de Lyman de HeII ($\lambda < 228$ A), les flux dans ces deux bandes étant estimés à partir des flux émis dans les raies de recombinaison. Il arrive que la température déduite du flux des raies de recombinaison HI, T_Z (HI) soit inférieure à T_Z (HeII). Harman et Seaton en déduisent que la nébuleuse est entièrement ionisée (en ce qui concerne l'hydrogène) et qu'une partie du flux Ly-c de HI s'échappe de la nébuleuse. Ils retiennent alors T_Z (HeII) comme étant la température de l'étoile excitatrice. Cette méthode suppose que le flux ultraviolet de l'étoile est bien représenté par un spectre de corps noir.

Or, des observations spatiales (POTTASCH et al., 1978) ont permis de mesurer le continuum de l'étoile jusque vers 1500 A. Dans ce domaine, la déviation du spectre d'un corps noir à 50 000 K par rapport à la loi de Rayleigh-Jeans devient notable, et on peut déterminer directement une température T_{UV}. Il s'avère que, très souvent, cette valeur concorde avec T_Z (HI), et ce pour des objets que Harman et Seaton avaient classés optiquement minces en se basant sur le fait que T_Z (HeII) > T_Z (HI). Il faut donc admettre, pour ces objets :

a) un excès (par rapport au corps noir à T_{eff}) de flux dans le continu de Lyman de HeII ;

b) une révision en baisse de la température effective, et surtout de la luminosité par rapport aux déterminations de Harman et Seaton ;

c) un reclassement dans la catégorie des nébuleuses optiquement épaisses.

Ces résultats sont confirmés par une méthode indépendante dans le travail de NATTA, POTTASCH et PREITE-MARTINEZ (1980).

Pour la suite, retenons que la luminosité des noyaux de N.P. est au plus de l'ordre de 10^3 $L_\odot$ (et non 10^4, valeur précédemment admise), et le flux de photons Ly-c de l'ordre de $5\ 10^{46}$ s^{-1} (contre $7\ 10^{47}$, indiqué par TERZIAN, 1974).

Enfin, la propriété des noyaux de N.P. qui est essentielle au modèle que nous allons proposer est l'existence d'un vent stellaire à grande vitesse. On avait depuis longtemps des indications de mouvements radiaux dans l'atmosphère des noyaux (voir, par exemple, Wilson 1948). Mais il s'agissait d'observations dans le domaine visible, qui ne sondaient que les parties les plus denses et les plus proches de la surface de l'étoile. Les observations dans le domaine UV, sensibles à des densités intégrées $\int Ndr$ nettement plus faibles, ont mis en évidence l'existence de vents stellaires ayant des vitesses d'éjection de quelques milliers de $km.s^{-1}$, déduites de l'étendue vers le "bleu" de la composante d'absorption du profil P Cygni. Quelques vitesses d'éjection figurent dans la Table 2. L'éjection d'un vent stellaire par les noyaux de N.P. est cohérente avec la propriété similaire des étoiles O de la Séquence Principale. L'idée qu'il s'agit de phénomènes semblables est renforcée par le fait que les vitesses d'éjection des noyaux de N.P. obéissent (dans les trois cas où les données d'observations pertinentes existent) à la relation empirique entre la vitesse d'éjection et la vitesse de libération trouvée par ABBOTT (1978) pour les étoiles O de la Séquence Principale :

Les taux de perte de masse, quant à eux, sont nettement plus incertains (cf. BENVENUTI et PERINOTTO, 1980 ; NUSSBAUMER, 1980) car leur détermination passe par une modélisation du vent stellaire. Ils sont de l'ordre de 10^{-10} à quelques 10^{-9} Mo/an. Si on compare ces taux de perte de masse à ceux des étoiles O, ils semblent être approximativement dans le rapport des luminosités.

Terminons cette Section par une Table qui rassemble les caractéristiques

de quelques N.P. bien observées :

TABLE 2

NEB	10^{-4}Ne	R	U	t	$10^{-3}U_w$	T_{eff}	L
	cm^{-3}	pc	$km.s^{-1}$	10^3ans	$km.s^{-1}$	10^3K	Lo
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
IC 2149	0.55	0.02	20[b]	1	1.5[d]		
N 6210	0.8	0.04	20[c]	2.5		48	425
IC 418	1.65	0.01	10[a]	1	1.[e]	32	370
N 2392	0.07	0.10	55[b]	2.		32	830
N 3242	0.19	0.08	20[b]	4.	2.3[d]	50	620
N 6720	0.08	0.10	30[b]	3.			
N 6572	2.1	0.025	15[a]	1.6			
N 7009	0.55	0.065	20[c]	3.2	2.8[d]		
N 7662	0.52	0.076	25[c]	3.3		48	2100
N 6826	0.20	0.065	10[c]	6.5	2.[d]	33	790

(1), (2), (3) : d'après les données de MACIEL et POTTASCH (1980), en restreignant l'échantillon aux distances déterminées sans faire d'hypothèse sur la masse ionisée.

(4) : déduit du ΔV de H, [OIII], [NeIII], sauf mention contraire

(5) : âge indicatif ; quotient du rayon par la vitesse d'expansion

(6) : vitesse du vent stellaire

a) Wilson, 1952 ; vitesse déduite de la valeur observée pour [OII] et [NII]

b) Wilson, 1949

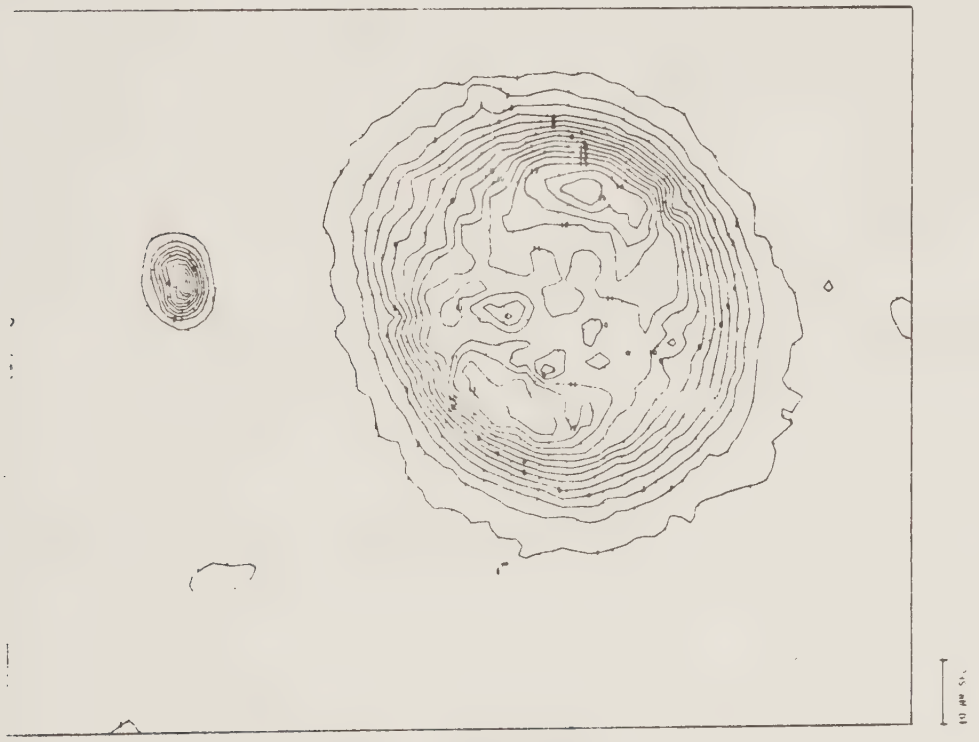
c) Osterbrock, Miller, Weedman, 1966

d) Benvenuti, Perinotto, 1980 ; 2nd IUE Conference

e) Harrington et al., 1980 ; MNRAS 191,13

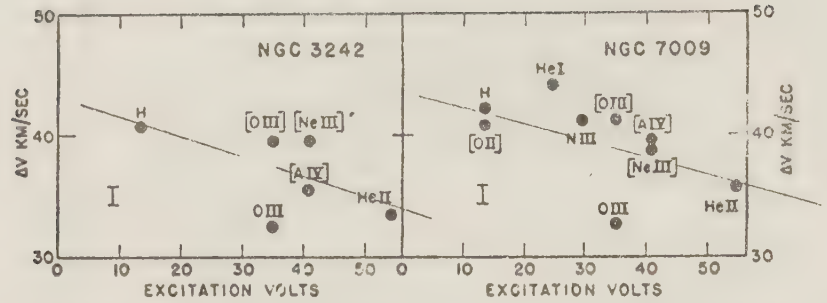
Figure 2.1 a. Exemple de stratification spatiale entre deux degrés d'ionisation d'un même élément. D'aprés Reay et Worswick 1977.

H I 6563 A (Hα).

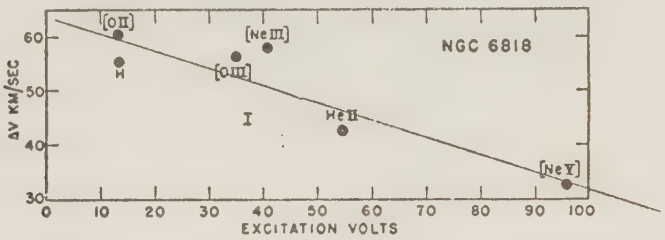


He II 4686 A.

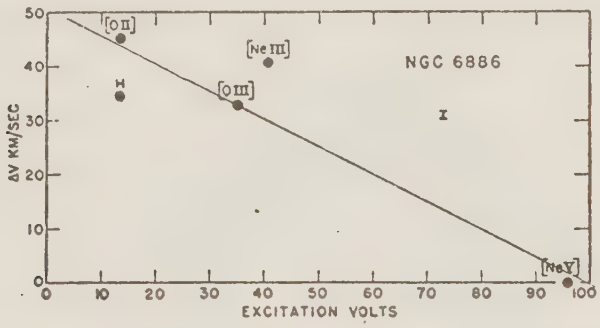
Figure 2.1b. Comme 2.1a, pour deux raies de recombinaison ayant des seuils d'excitation à 912 A et 228 A.



.—Separations of components of nebular lines as a function of excitation for NGC 3242 and NGC 7009. In this and the next three figures the short vertical lines indicate the mean mean deviations.



.—Separations of components of nebular lines as a function of excitation for NGC 6818



—Separations of components of nebular lines as a function of excitation for NGC 6886

Figure 2.2 Progression des vitesses radiales avec le potentiel d'ionisation. D'après Wilson 1952.

Section 3

REVUE DES MODELES

1. Introduction

Dans cette section, nous allons passer en revue quelques modèles publiés en nous intéressant principalement au problème de la création et du maintien d'une cavité centrale apparemment vide. Comme dans la section précédente, nous laisserons de côté le problème de la structure d'ionisation. Nous décrirons ensuite qualitativement le modèle que nous proposons. Le comportement détaillé et, dans une certaine mesure, la validité du modèle proposé ne pourront être vérifiés qu'après établissement et exploitation d'un traitement numérique approprié, qui sera exposé dans les sections 4 à 7. Cependant, pour l'essentiel, les bases physiques du modèle proposé sont contenues dans la présente section.

2. Transfert direct d'impulsion du rayonnement au gaz

Nous verrons au paragraphe suivant que le flux d'impulsion transporté par le rayonnement stellaire pourrait éventuellement avoir un ordre de grandeur convenable pour équilibrer la pression du gaz à la frontière interne de la nébuleuse. Nous allons montrer simplement que l'absorption du rayonnement stellaire par le gaz ionisé donne, en fait, une force volumique constante, et ne saurait donc maintenir une frontière bien délimitée au bord interne de la nébuleuse.

En utilisant les résultats de HUMMER et SEATON (1962), nous admettons que le rayonnement Ly-c diffus est réabsorbé sur place. On peut alors écrire deux équations séparées pour les intensités moyennes du rayonnement stellaire et diffus. Nous supposons pour simplifier que le rayonnement stellaire est monochromatique à la fréquence ν_s et le rayonnement diffus à la fréquence ν_d (sensiblement égale à la limite d'ionisation de l'hydrogène). Soit $I^s(\theta)$ et $I^d(\theta)$ les intensités des deux champs de rayonnement (en photons.cm^{-2}.s^{-1}.srd^{-1}) et J^s, J^d les intensités moyennes :

$$J = \frac{1}{4\pi} \int I \, d\Omega$$

L'approximation "sur place" consiste à admettre que les taux de production et de destruction de photons diffus (photons issus des recombinaisons) s'équilibrent localement :

$$4\pi J^d \kappa_{\nu_d} = n_e n_+ \alpha_1 \qquad (3.1)$$

où $K_{\nu_d} = n_o a(\nu_d)$ est l'opacité pour la photoionisation à la fréquence ν_d $a(\nu)$ la section efficace de photoionisation, n_o la densité d'hydrogène neutre et α_1 le coefficient de recombinaison sur le fondamental. Il s'ensuit que la décroissance du flux de photons stellaires s'équilibre avec les recombinaisons de type "B", c'est-à-dire sur les niveaux autres que le fondamental :

$$\frac{4\pi}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 J^s\right) = -4\pi K_{\nu_s} J^s = -n_e n_+ \alpha_B \qquad (3.2)$$

En divisant membre à membre (3.1) et (3.2), il vient :

$$\frac{J^d}{J^s} = \frac{\alpha_1}{\alpha_B}\frac{K_{\nu_s}}{K_{\nu_d}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_B}\frac{a(\nu_s)}{a(\nu_d)} \qquad (3.3)$$

Comme $\alpha_1 \approx \frac{1}{2}\alpha_B$, et que la section efficace de photoionisation décroît rapidement $\left(\nu^{-3}\right)$ avec la fréquence, on en déduit que le rapport des intensités moyennes des rayonnements diffus et stellaire est constant et inférieur à l'unité. Calculons maintenant les pressions de radiation. Pour le rayonnement stellaire, la pression est un tenseur anisotrope :

$$\left.\begin{aligned} P^s_{rr} &= \int \frac{h\nu_s}{c} I^s(\theta)\cos^2\theta\, d\Omega = 4\pi\frac{h\nu_s}{c} J^s \\ P^s_{\theta\theta} &= P^s_{\varphi\varphi} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

Le rayonnement diffus est isotrope, et :

$$P^d_{rr} = P^d_{\theta\theta} = P^d_{\varphi\varphi} = \frac{4\pi}{3}\frac{h\nu_d}{c} J^d \qquad (3.5)$$

La force par unité de volume est donnée par la divergence du tenseur des pressions. Pour la contribution de la pression du rayonnement stellaire, qui est purement radiale :

$$\begin{aligned} f^s &= -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 P^s_{rr}\right) \\ &= \frac{h\nu_s}{c} n_e n_+ \alpha_B \end{aligned} \qquad (3.6)$$

Pour le champ diffus, nous ne pouvons obtenir un résultat sous la même forme simple qu'en faisant l'approximation plan-parallèle. Pour un tenseur de pression isotrope :

$$f^d = -\frac{d}{dr} P^d$$
$$\approx -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 P^d\right)$$
$$\approx -\frac{4\pi}{3}\frac{h\nu_d}{c}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 J^1\right)$$

Et en utilisant (3.3) :

$$f^d \approx \frac{1}{3}\frac{h\nu_d}{c} n_e n_+ \alpha_1 \qquad (3.7)$$

Comme $\alpha_1 \approx \frac{1}{2}\alpha_B$, $\nu_d < \nu_S \Longrightarrow f^d < \frac{1}{6} f^S$, et l'approximation plan-parallèle faite pour obtenir (3.7) sous une forme simple ne porte que sur une faible partie de la force totale calculée.

En conclusion, l'absorption du rayonnement stellaire par les atomes d'hydrogène neutre (minoritaires !) de la région ionisée produit une force volumique proportionnelle au flux de rayonnement et à la densité de neutres. Mais l'équilibre d'ionisation fait que la décroissance du premier facteur est compensée par l'augmentation du second à mesure qu'on s'éloigne de l'étoile. Le résultat est exact pour le rayonnement stellaire direct, et approximatif pour la part relativement faible du rayonnement stellaire diffus.

C'est probablement ce résultat simple (mais que nous n'avons vu exposer nulle part) qui a conduit plusieurs auteurs à faire appel au transfert d'impulsion du rayonnement stellaire sur des sites absorbants qui, contrairement aux atomes neutres dans la zone ionisée, ont une densité volumique constante : les grains de poussière interstellaire.

3. Modèles exploitant la pression du rayonnement sur les grains

MATHEWS (1967) a proposé d'expliquer la cavité centrale de la nébuleuse Rosette en faisant appel à la pression exercée par le rayonnement des étoiles de l'amas central NGC 2244 sur les grains de poussière inclus dans le gaz ionisé qui l'entoure. Cette idée a été reprise par FERCH et SALPETER (1975) pour l'appliquer aux nébuleuses planétaires (N.P.). La présence de grains dans une région d'hydrogène ionisé, dont la température avoisine 10^4 K, peut sembler

surprenante. Elle s'explique par le fait que la photoionisation procure aux grains une charge positive qui croît jusqu'à ce que le taux d'éjection d'électrons soit équilibré par le taux de recombinaison*. Le grain est alors à un potentiel de l'ordre de l'énergie d'un photon stellaire ionisant (déduction faite du travail d'extraction), et ce potentiel est supérieur à l'énergie thermique moyenne des ions**. D'ailleurs, la présence de grains dans les régions H II est confirmée par les observations dans le domaine infrarouge. Le modèle proposé par Ferch et Salpeter inclut le transfert d'impulsion du rayonnement Ly-c sur les grains, ainsi que le transfert radiatif du rayonnement Ly-α : diffusion résonante sur les atomes d'hydrogène neutre et absorption par les grains, traités par une méthode Monte-Carlo. Ils remarquent que la pression du rayonnement Ly-α ne joue pas un grand rôle.

On peut vérifier très simplement la validité de leur modèle en le rapprochant d'une des nébuleuses bien observées qui figurent dans la Table 2 de la précédente section : NGC 6826. WEEDMAN (1968) donne pour cette N.P. une épaisseur de la coquille ionisée $\Delta r / r_{ext} \simeq \frac{1}{2}$. Si on suppose, avec Ferch et Salpeter, que la luminosité du noyau est de 10^4 $L_\odot$ (soit 6.10^7 UMIS, voir section 4 pour la définition du système UMIS), et qu'on soit généreux en admettant que tout le flux de photons serve à transférer de l'impulsion aux grains, on peut calculer le flux d'impulsion au niveau du rayon interne de la coquille ionisée :

$$r_{int} \simeq 0.03 \text{ pc}$$

$$P_r = \frac{L}{4\pi r^2 c} \simeq 1.8\ 10^4\ M_\odot\, pc^{-1}\, Ma^{-2}$$

On peut par ailleurs calculer la pression du gaz à partir de la densité électronique observée : $n_e = 2\ 10^3\ cm^{-3}$

$$P_g = \frac{2}{3} \rho \epsilon \simeq 9\ 10^3\ M_\odot\, pc^{-1}\, Ma^{-2}$$

On en déduit que la moitié environ du flux d'impulsion (et d'énergie) doit être absorbée par les grains. Quand on sait que les sections efficaces des grains croissent avec la fréquence, on en déduit que les photons Ly-c seront préférentiellement absorbés. La validité du modèle semble donc marginale lorsqu'on le confronte à une nébuleuse réelle, quoique la situation pourrait être améliorée en supposant que les grains ont un albédo non nul (ce que n'ont pas envisagé les auteurs).

---

* : voir BARLOW (1971)

** : voir PECKER (1971)

Ce modèle, dont la validité était marginale lorsqu'il a été proposé, est définitivement éliminé par deux types d'observations récentes :

a) Les observations UV du continuum nébulaire (BENVENUTI et PERINOTTO, 1980) montrent qu'il n'est que très faiblement contaminé par une contribution du continuum stellaire diffusé sur les grains éventuellement présents. Ceci ne remet pas en question la présence de grains dans ou autour de la zone ionisée des N.P., mais élimine la possibilité d'une profondeur optique notable dans l'ultraviolet.

b) Comme on l'a noté dans la section 2, les luminosités des noyaux de nébuleuses planétaires ont été révisées fortement en baisse. Si on adopte pour le noyau de NGC 6826 la luminosité calculée par POTTASCH et al. (1978), et qu'on reprenne le calcul simple fait plus haut, on trouve que $P_r / P_g = 1/7$, dans le cas le plus optimiste (absorption complète). Notons que ce rapport est indépendant de la distance adoptée pour NGC 6826, pour une magnitude apparente du noyau et un rayon angulaire de la nébuleuse fixés.

4. Rôle de la pression de rayonnement Ly-α

Les photons Ly-α sont créés en nombre égal à celui des photons Ly-c stellaires absorbés par le gaz. Ils diffusent sur les atomes d'hydrogène neutre avec une section efficace qui est très grande, de sorte que la profondeur optique dans le centre de la raie est très grande (de l'ordre de 10^3) dans la région ionisée, et encore plus grande dans une éventuelle région neutre périphérique. Ils peuvent être détruits lorsqu'un atome d'hydrogène effectue une transition 2s → 1s par emission de deux photons, ou s'échapper par diffusion spatiale vers le bord externe de la nébuleuse, ou bien en fréquence vers les ailes de la raie. Si les photons Ly-α ne s'échappaient pas et n'étaient pas détruits, leur densité (et leur pression) pourrait croître indéfiniment. Le problème du transfert Ly-α est complexe, et nous nous contenterons de citer les conclusions des travaux publiés. GEORGE (1973) et HARRINGTON (1973) étudient le transfert de Ly-α dans des régions H II compactes, sans poussière. Ils sont d'accord pour conclure que, pour une densité élevée, de l'ordre de 10^5 cm^{-3}, la pression du rayonnement Ly-α est comparable à celle du gaz, et qu'elle est plus faible dans des régions H II dont la densité est plus faible, ou bien qui sont en expansion. Ferch et Salpeter, cités plus haut, indiquent que pour leurs modèles de N.P. comportant de la poussière, le rayonnement Ly-α joue un rôle dynamique négligeable.

5. Transfert d'impulsion d'un vent stellaire

Cette possibilité a été envisagée par MATHEWS (1966a) dans un modèle de la nébuleuse Rosette antérieur à celui (Mathews, 1967) cité en 3., puis dans des modèles de nébuleuses planétaires (Mathews, 1966b). Dans ce dernier travail, l'auteur commence par montrer l'insuccès du modèle suivant lequel les N.P. résulteraient simplement de l'éjection d'une enveloppe, qui serait ensuite ionisée. En effet, le gaz, une fois ionisé, se répand dans la cavité centrale et la remplit. Il propose que la pression dynamique d'un vent stellaire confine le gaz au bord interne de la nébuleuse. Il s'impose comme contrainte que la masse éjectée par le vent pendant la vie de la nébuleuse ne modifie pas notablement (10 %) la masse de cette dernière, ce qui conduit à :

$$\frac{dM}{dt} < 7\,10^{-7}\ M_\odot/an$$

Il obtient des résultats en bon accord avec les observations, pourvu que la pression dynamique ρv^2 du vent soit suffisante, ce qui est réalisé pour des vitesses de l'ordre de 10^3 km/s. A l'époque, les résultats de Cox et Tucker concernant les pertes radiatives n'étaient pas connus ; néanmoins, Mathews remarque que son modèle suppose une interaction inélastique, donc un choc radiatif entre le vent et la nébuleuse, et que cela n'est possible que si la fonction de refroidissement vaut 10^{-19} erg.cm^3.s^{-1} aux températures supérieures à 10^4 K. Or, il est maintenant connu que la fonction de refroidissement vaut au plus 10^{-21} erg.cm^3.s^{-1} (voir à ce sujet la section 4).

KWOK, PURTON et FITZGERALD (1978) reprennent essentiellement le même modèle, mais sans avoir l'excuse d'ignorer la valeur exacte de la fonction de refroidissement.

Outre le fait qu'il requiert une valeur irréaliste de la fonction de refroidissement, on peut élever une seconde objection à l'encontre du type de modèle faisant appel au transfert d'impulsion du vent stellaire à la nébuleuse : le taux de perte de masse invoqué est trop élevé. BEAUDET et SALPETER (1969) ont calculé une grille de modèles pour des étoiles ayant évolué jusqu'au stade des noyaux de nébuleuses planétaires : un coeur carbone-oxygène dégénéré entouré de deux couches de combustion de l'hélium et de l'hydrogène. Il s'avère que le rayon de ces étoiles est extrêmement sensible à la masse de l'enveloppe d'hydrogène. Beaudet et Salpeter trouvent que, pour une étoi-

le de 0.75 Mo ayant une température effective de $5\ 10^4$ K,

$$\Delta M / \Delta \log T_{eff} \simeq 1.5\ 10^{-3}\ M_\odot$$

On peut donc penser que, lorsque la température effective du noyau est suffisamment élevée pour ioniser la nébuleuse, la masse de l'enveloppe est inférieure à $5\ 10^{-4}$ M⊙. Plus récemment, HARM et SCHWARZSCHILD (1975) ont suivi l'évolution d'étoiles de faible masse juste après le sommet de la branche des des géantes rouges. Ils supposent que l'éjection de l'enveloppe s'arrête quand l'instabilité pulsationnelle décroît. Ils trouvent que la masse de l'enveloppe d'hydrogène de l'étoile est de $0.6\ 10^{-3}$ à $1.2\ 10^{-3}$ M⊙, la valeur la plus faible donnant le meilleur accord avec les données observationnelles sur le temps d'évolution des noyaux de N.P. Donc, sur une durée de vie estimée à 10^4 ans, le taux de perte de masse doit être inférieur à $5\ 10^{-8}$ M⊙/an, un ordre de grandeur plus petit que les taux envisagés par Mathews ou par Kwok, Purton et Fitzgerald. D'ailleurs, les taux de perte de masse observés, bien qu'incertains, sont encore nettement plus faibles que la limite supérieure calculée ci-dessus.

Il se trouve que la seconde objection faite aux modèles à vent stellaire (consommation excessive de masse) va tomber dès lors que le premier problème (traitement du choc) sera traité correctement.

6. Transfert de l'énergie d'un vent stellaire

Le principe du modèle que nous proposons est issu d'un modèle proposé par WEAVER et al. (1977), décrivant l'interaction du vent stellaire d'une étoile O avec le milieu interstellaire..DYSON, FALLE et PERRY (1979) ont proposé un modèle semblable en relation avec les QSO*. Le modèle peut être décrit qualitativement comme suit : l'interaction du vent stellaire① avec un milieu ambiant④ au repos donne naissance à deux chocs : l'un qui se propage vers l'extérieur dans le milieu ambiant, l'autre qui fait face au vent stellaire et assure la transition supersonique-subsonique. Entre les deux chocs, on trouve d'une part du gaz initialement au repos ayant traversé le choc externe③ , d'autre part du gaz issu du vent stellaire ayant traversé le choc interne② . Ces deux fluides sont en équilibre de pression le long d'une interface où température et densité, contrairement à la pression, sont discontinues. La figure 3.1 résume la situation :

---

*: voir également FALLE (1975)

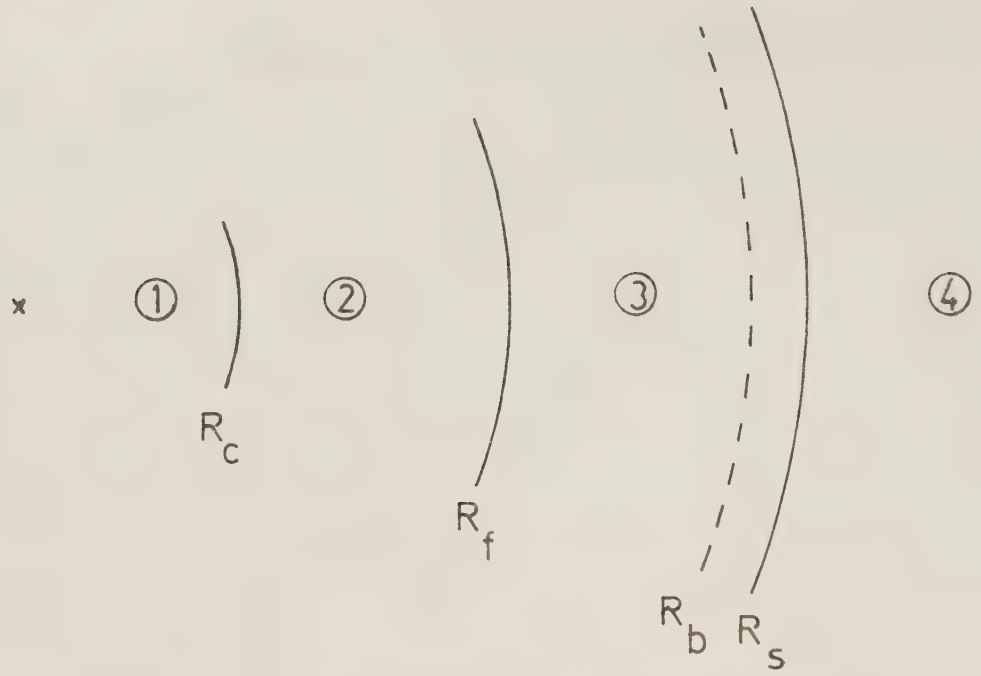


Figure 3.1 : Représentation schématique du modèle proposé.
R_c : choc interne; R_f : interface de discontinuité; R_b : front d'ionisation
R_s : choc externe.

Dans une situation typique de l'interaction d'une étoile O avec le milieu interstellaire (et cela est également vrai pour l'interaction d'un noyau de N.P. avec l'enveloppe qu'il a éjectée), les températures et densités des régions 2 et 3, calculées en supposant les chocs adiabatiques, vérifient : $T_2 > T_3$; $\rho_2 < \rho_3$. Il s'ensuit (voir la forme de la fonction de refroidissement section 4) que le temps de refroidissement est, dans la région 3, nettement inférieur à l'âge du système, alors que les pertes radiatives sont (à ce stade de la discussion) négligeables dans la région 2. Les échanges conductifs à l'interface R_f donnent lieu à la formation d'un front d'évaporation, et la masse de la région 2 s'accroît aux dépens de la région 3 (ce point est développé dans la section 6). Enfin, le flux Ly-c de l'étoile centrale ionise une fraction de la région 3. En deçà d'une valeur limite du flux Ly-c, la région 3 est partiellement ionisée, et un front de type D faible s'insère entre R_f et R_s ; au-delà de cette valeur, le front d'ionisation se confond avec R_s et est de type R. Il s'avèrera que, dans le cas des nébuleuses planétaires, on sera dans le premier cas.

Le modèle de Weaver et al. repose sur les hypothèses suivantes :

a) il existe un choc d'épaisseur faible en R_c ;
b) il y a équipartition totale des températures électronique et ionique dans le choc R_c ;
c) les pertes radiatives sont négligeables dans la région 2, sauf dans le front de conduction, où elles sont calculées comme une perturbation de la solution sans pertes (voir à ce sujet le paragraphe 2.3 de la section 6, et les paragraphes suivants) ;
d) l'épaisseur de la région 3 est négligeable ;
e) la structure de la région 2 peut, à chaque instant, être décrite par une solution autosimilaire ;
f) la masse évaporée au travers de R_f domine celle de la région 2, mais est négligeable devant celle de la région 3.

Examinons point par point la validité de ces hypothèses :

a) Si on examine la solution obtenue par Weaver et al., ou bien, en anticipant, nos modèles de nébuleuses planétaires, on peut calculer que le libre parcours moyen (vis-à-vis des collisions coulombiennes) d'un proton à la vitesse du vent stellaire ($\gtrsim$ 1 000 km/s) est dix à cent fois supérieur à l'épaisseur de la région 2. Toutefois, on observe dans le vent solaire des chocs dont l'épaisseur est nettement inférieure au libre parcours moyen coulombien. La nature de la dissipation d'un choc se produisant dans un plasma est un sujet ardu et controversé, pour autant que nous puissions en juger. En schématisant considérablement, l'interaction du faisceau des particules amont avec le fluide aval alimente des instabilités de plasma qui convertissent l'énergie cinétique ordonnée en mouvements désordonnés. Une échelle de longueur naturelle dans le cas où le champ magnétique est soit absent, soit perpendiculaire au choc, est le produit de la vitesse de propagation du choc D par la fréquence plasma ionique $\omega_{pi} = (n_i q^2/m_i \epsilon_o)^{1/2}$. Dans une situation typique des nébuleuses planétaires, $(n_i = 1\,cm^{-3}, D = 10^3\,km/s)$ cette longueur est de l'ordre du kilomètre.

b) Les expériences numériques (DAVIDSON et al., 1970 ; COLGATE et HARTMAN, 1967 ; PAPADOPOULOS et al., 1971) et les observations dans le vent solaire (MONTGOMERY, ASBRIDGE et BAME, 1970) montrent que les électrons n'atteignent pas l'équipartition avec les ions, mais il n'existe pas de théorie bien établie de la thermalisation dans les chocs.

c) Nous constaterons à l'examen des résultats que les pertes radiatives constituent une perturbation majeure au bilan énergétique. Un traitement en perturbation n'est donc pas justifié.

d) On observe que l'épaisseur de la région ionisée des N.P. n'est pas négligeable par rapport à leur rayon.
e) Le problème traité par Weaver et al. admet effectivement une élégante solution analytique dès lors que sont remplies les conditions d'autosimilarité (SEDOV, 1959). Mais l'autosimilarité est brisée par les pertes radiatives et par l'épaisseur non négligeable de la région ionisée 3 (sauf si on suppose une variation temporelle ad hoc du flux ionisant qui maintienne un rapport R_f/R_b constant). Elle l'est également dès lors qu'on veut étudier l'évolution d'un système avec des conditions initiales et aux limites arbitraires.
f) Nous verrons que la masse évaporée ne domine pas toujours largement la masse éjectée par le vent stellaire.

Pour ces raisons, nous avons décidé de retenir l'idée de la formation d'une cavité remplie de gaz chaud, et de nous doter d'un outil de traitement numérique qui ait des caractéristiques permettant de lever les restrictions pesant sur les méthodes analytiques, à savoir :

- traitement numérique de la région 2 (que nous appellerons désormais région coronale), avec plasma à deux températures ;
- traitement "exact" (mis à part les incertitudes qui pèsent sur sa structure interne) du choc interne ;
- traitement du front d'évaporation valable même si les pertes radiatives sont importantes ;
- traitement couplé de la dynamique de la région coronale et de la région 3 (que nous appellerons région nébulaire), incluant le front d'ionisation et le choc externe. Les méthodes que nous avons utilisées sont exposées dans les sections suivantes (4 à 7). On pourra noter que nous avons fait usage, chaque fois que c'était possible, de méthodes analytiques (sections 5 et 6).

Section 4

UNITES ET PHYSIQUE LOCALE

1. Unités

Il est avantageux, dans l'étude de problèmes astronomiques, d'utiliser des unités adaptées aux ordres de grandeur couramment rencontrés. D'où, par exemple, l'introduction du parsec. Mais cette louable initiative n'a généralement pas été menée à terme : les densités sont mesurées en particules par cm^3, les vitesses en km/s, les durées en ans ou en millions d'années, etc... D'où un perpétuel exercice de conversion entre les unités "astronomiques" et le système C.G.S. Ces conversions sont souvent imposées par le fait que les phénomènes liés à la physique atomique sont couramment décrits dans le système C.G.S.

Nous proposons d'adopter un système d'unités cohérent, c'est-à-dire où les unités dérivées sont des monômes des unités de base, et de choisir des unités de base adaptées : 1 masse solaire, 1 parsec, 10^6 ans, Unités Milieu Interstellaire, ou U.M.I.S en abrégé. Le tableau ci-dessous donne quelques facteurs de conversion entre le système U.M.I.S et le système C.G.S. Remarquons toutefois qu'on n'en aura plus besoin dès lors qu'on travaillera uniquement dans le système U.M.I.S.

1 $M_\odot$	$2\ 10^{33}$ g
1 pc	$3\ 10^{18}$ cm
1 Ma = 10^6 ans	$3\ 10^{13}$ s
1 $pc.Ma^{-1}$	10^5 $cm.s^{-1}$ = 1 $km.s^{-1}$
1 $M_\odot pc^2.Ma^{-2}$	$2\ 10^{43}$ erg
1 $M_\odot pc^2.Ma^{-3}$	$6.7\ 10^{29}$ $erg.s^{-1}$

Donnons par ailleurs quelques équivalences utiles :

$$1\,L_\odot = 4\ 10^{33}\ erg.s^{-1} = 6\ 10^3\ M_\odot\ pc^2\ Ma^{-3}$$

Pour un gaz comportant 10 % d'hélium et 90 % d'hydrogène (en nombre) :

$$\frac{n_H}{1\,cm^{-3}} = 30\,\frac{\rho}{1 M_\odot\,pc^{-3}} \qquad (4.1)$$

Par ailleurs, le rapport k/μ (où k est la constante de Boltzman et μ la masse moyenne des particules) alourdit toutes les expressions faisant intervenir la température. Or, pour une composition et un degré d'ionisation fixés, l'énergie interne par unité de masse est dans un rapport constant avec

la température. En s'en tenant à la composition standard (10 % He en nombre) la masse moléculaire vaut :

a) gaz neutre : $\mu_0 = 1.3\ m_H = 2.16\ 10^{-24}\ g$

b) gaz ionisé : $\mu_1 = \frac{1.3}{2.1}\ m_H = 1.03\ 10^{-24}\ g$

et on a les correspondances suivantes entre énergie interne spécifique et température :

$$\frac{\epsilon}{1\ pc^2\ Ma^{-2}} = 0.96 \cdot 10^{-2}\ \frac{T}{1\ K} \qquad \text{(neutre)} \qquad (4.2)$$

$$\frac{\epsilon}{1\ pc^2\ Ma^{-2}} = 2.02 \cdot 10^{-2}\ \frac{T}{1\ K} \qquad \text{(ionisé)} \qquad (4.3)$$

Nous serons amenés à prendre en compte des phénomènes dépendant essentiellement de la température électronique, et ce dans des situations où ions et électrons n'ont pas nécessairement la même température. Or, pour un gaz ionisé ayant la composition standard :

$$n_i = 0.476\ (n_i + n_e)$$

$$n_e = 0.524\ (n_i + n_e)$$

Nous faisons les approximations :

$$0.96 \simeq 1 \qquad 2.02 \simeq 2 \qquad n_i \simeq n_e$$

d'où s'en suit la règle simple :

$$\epsilon = T/100 \qquad \text{(neutre)} \qquad (4.4)$$

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_i &= T_i/100 \\ \epsilon_e &= T_e/100 \end{aligned}\right\} \quad \text{(ionisé)}$$

Dans le cas d'un gaz ionisé, et pour les phénomènes dépendant de la température électronique, ϵ_e sera noté plus simplement ϵ lorsque le contexte interdit toute confusion.

2. Lois des phénomènes locaux

2.1 Pertes radiatives

Les pertes radiatives résultent essentiellement de l'excitation colli-

sionnelle des ions présents, suivie d'une désexcitation radiative (une contribution plus faible provient des recombinaisons). Nous adoptons la fonction de refroidissement telle qu'elle figure dans la revue de DALGARNO et Mc CRAY (1972) telle que la puissance rayonnée par unité de volume soit :

$$\frac{P}{1\,erg.cm^{-3}s^{-1}} = \frac{n_e}{1\,cm^{-3}} \cdot \frac{n_H}{1\,cm^{-3}} \cdot \Lambda(T_e)$$

Il faut garder présent à l'esprit le fait que ce calcul suppose réalisé l'équilibre statistique entre ionisation collisionnelle et recombinaison radiative. En première approximation, nous renonçons à suivre en détail l'état d'ionisation de la demi-douzaine d'éléments susceptibles de contribuer aux pertes, et nous supposons leur équilibre d'ionisation réalisé. En vue du calcul numérique, nous avons établi une forme analytique simple qui représente avec un degré d'approximation satisfaisant les résultats de DALGARNO et Mc CRAY.

Soit une puissance rayonnée par unité de volume :

$$P/1\,M_\odot\,pc^{-1}\,Ma^{-3} = \Lambda(\bar{\epsilon}_e)\,[\rho/1\,M_\odot\,pc^{-3}]^2 \qquad (4.5)$$

avec :

$$\Lambda(\bar{\epsilon}_e) = 2.2\,10^7 \exp[-0.8\,(\mathrm{Log}(\bar{\epsilon}_e)-7.6)^2]$$
$$+ 9.0\,10^5 \exp[-0.065\,(\mathrm{Log}(\bar{\epsilon}_e)-11.5)^2]$$
$$+ 6.7\,10^2\,\bar{\epsilon}_e^{1/2}\,Y(\bar{\epsilon}_e - 10^3)$$

$$Y(x) = 1 \quad \text{si} \quad x>0\,, \quad 0 \text{ sinon}$$

$$\bar{\epsilon}_e = \epsilon_e / 1\,pc^2\,Ma^{-2}\,, \quad \text{mesure de}$$

dans le système U.M.I.S.

La Fig. (4.1) montre l'allure de la fonction de refroidissement adoptée représentée en unités C.G.S pour permettre la comparaison avec la Fig. (4.2) reproduite de DALGARNO et Mc CRAY.

2.2. Conduction thermique

Nous adoptons le résultat de SPITZER (1962) ; la valeur du logarithme de

COULOMB peut être prise constante et égale à 30. On peut exprimer la conductivité thermique sous la forme :

$$K_e = K_{oe}\, \epsilon_e^{5/2} \qquad (4.6)$$

$$K_{oe} = 2.7\, 10^{-11}\, M_\odot\, pc^{-6}\, Ma^{+4} \qquad (4.7)$$

Notons que c'est $K_o\, \epsilon^{5/2}$ et non K_o qui a les dimensions d'une conductivité.

La valeur du flux saturé est donnée par COWIE et Mc KEE :

$$F_{sat} = 5\, \varphi_s\, p^{3/2}\, \rho^{-1/2}$$

où φ_s est une constante mal connue de l'ordre de l'unité. Nous adoptons la formule simple :

$$F_{sat} = 5\, \rho\, \epsilon_e^{3/2} \qquad (4.8)$$

qui correspond en fait au choix de $\varphi_s = (4/3)^{-3/2}$, et est valable même si les températures électronique et ionique sont inégales.

2.3. Conduction thermique des ions

Pour une même température, les libres parcours moyens des ions et des électrons sont sensiblement égaux. Mais la vitesse thermique des ions est plus faible d'un facteur $(m_i/m_e)^{-1/2} \simeq 1/43$. La conductivité et le flux saturé des ions s'obtiennent donc en multipliant les valeurs électroniques par ce facteur. On serait tenté de négliger a priori la conductivité ionique. On verra toutefois qu'elle peut dominer la conductivité électronique, et ce, même dans des situations où les deux températures sont faiblement différentes (seul compte le gradient).

2.4. Relaxation ion-électron

Le résultat de SPITZER se met sous la forme :

$$\tau_{ei} = \tau_o \left(\epsilon_e + \frac{m_e}{m_i}\, \epsilon_i\right)^{3/2} \rho^{-1} \qquad (4.9)$$

$$\tau_o = 9.10^{-12}\, M_\odot\, pc^{-6}\, Ma^{+4}$$

De fait, ϵ_e reste toujours grand par rapport à $m_e \epsilon_i / m_i$, et τ_{ei} dépend uniquement de ϵ_e . La puissance échangée entre les ions et les électrons, par unité de volume, s'écrit :

$$R_{e \to i} = \rho (\epsilon_e - \epsilon_i) / \tau_{ei}$$

Comparons cette puissance à celle des pertes radiatives dans une situation où les températures électronique et ionique sont nettement différentes. Dans ce cas, $|\epsilon_e - \epsilon_i|$ est :

- soit de l'ordre de ϵ_e $\quad (\epsilon_e \gg \epsilon_i)$
- soit supérieur à ϵ_i $\quad (\epsilon_i \gg \epsilon_e)$

Donc, dans les situations hors équilibre :

$$R_{e \to i} \geqslant \rho \epsilon_e / \tau_{ei} = \rho^2 \epsilon_e^{-1/2} / \tau_0$$

Pour comparer les échanges de relaxation avec les pertes radiatives, il suffit donc de comparer $\epsilon_e^{-1/2} / \tau_0$ à $\Lambda(\epsilon)$. La Fig. (4.1) montre que la relaxation est toujours au moins 30 fois plus rapide que les pertes radiatives dans le domaine de température considéré. On peut en déduire :

a) Dans une situation où l'évolution est régie par les pertes radiatives, la relaxation ion-électron est sûrement réalisée (voir plus loin l'étude des fronts d'évaporation et de condensation).

b) Dans une situation où un gaz d'électrons chauds cède de l'énergie à des ions froids, les "pertes" par relaxation dominent les pertes radiatives (voir plus loin étude du précurseur électromagnétique)

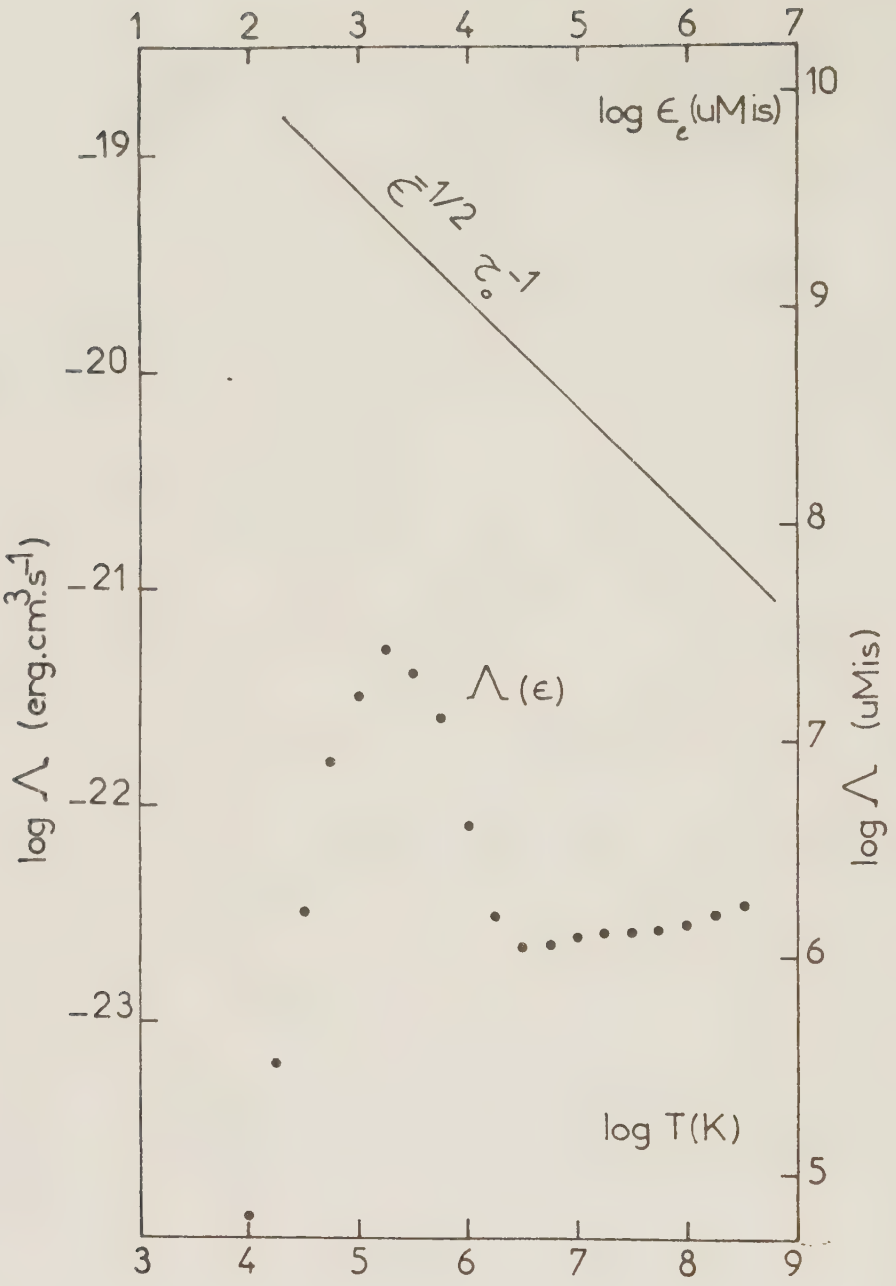


Figure 1a : Fonction de refroidissement adoptée. Comparaison du taux de relaxation avec le taux de refroidissement.

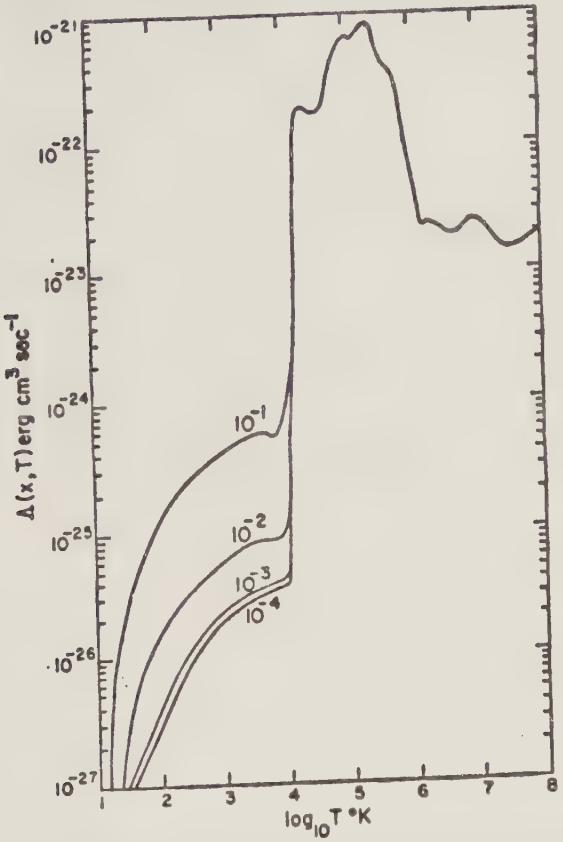


FIGURE 2. The interstellar cooling function $\Lambda(x, T)$ for various values of the fractional ionization x. The labels refer to the values of x.

Figure 1b : Fonction de refroidissement de la matière interstellaire. D'après Dalgarno et Mac Cray, Ann. Rev. Astr. Ap. 1972.

Section 5

STRUCTURE DU PRECURSEUR ELECTRONIQUE

But de l'étude

La structure d'un choc fort dans un plasma ionisé, optiquement mince, a été étudiée dans le cas plan parallèle. nous rappellerons plus loin les principaux résultats de cette étude, dûe à SHAFRANOV (1957). Dans le cas d'un problème à géométrie sphérique -nous nous intéressons au choc interne se produisant au raccordement d'un vent stellaire supersonique avec le milieu externe- le problème doit être réétudié dès lors que le choc ne peut plus être considéré comme localement plan, c'est-à-dire quand ses dimensions caractéristiques ne sont plus petites par rapport à son rayon. De plus, et indépendamment des effets géométriques de courbure, le traitement de SHAFRANOV doit être modifié pour tenir compte de la saturation de la conduction électronique.

Rappel des principaux résultats dans le cas plan

Le problème du choc fort, optiquement mince, avec conduction électronique, est traité dans l'ouvrage de ZELDOVICH et RAIZER (1967). Nous le passons rapidement en revue, sous une forme légèrement différente, et en nous limitant au précurseur (pour des raisons qui apparaitront dans la Section 7).

Soit un choc fort se propageant dans un gaz ionisé. Supposant dans un premier temps la relaxation complète derrière le choc, la dispersion de vitesse thermique V_e des électrons y est donnée par :

$$V_e = (3/32)^{1/2} D \, (m_p/m_e)^{1/2}$$
$$\simeq 13 \, D \qquad (5.1)$$

où est la vitesse du front par rapport au fluide amont. Par ailleurs, pour les protons :

$$V_p = (3/32)^{1/2} D$$
$$\simeq 0.3 \, D \qquad (5.2)$$

Ainsi, contrairement aux protons, les électrons peuvent dépasser le front de choc et constituer un précurseur où $T_e > T_p$. Deux approximations simplifient le calcul de la structure de ce précurseur :
a) On suppose que le profil de vitesse en amont du choc n'est pas

perturbé. En effet, l'énergie spécifique (par unité de masse de fluide) des électrons en amont a, au plus, la valeur qu'elle aurait en aval après relaxation complète, soit :

$$\epsilon_e \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(3D/4\right)^2 = 9D^2/64 \qquad (5.3)$$

La pression électronique est donc, en première approximation, négligeable devant la pression dynamique

$$p_e = 2\epsilon_e \rho/3 \leq (3/32)\rho D^2 \qquad (5.4)$$

Ainsi, malgré la présence du précurseur, le fluide amont est "froid".

b) On néglige les échanges d'énergie par relaxation ion-électron dans le précurseur, qui sont moins rapides que les échanges entre électrons par un facteur m_e/m_p.

Dans ces conditions, le profil d'énergie spécifique dans le précurseur est donné par :

$$M(x-x_0)/K_0 = 2/5\ \epsilon^{5/2} \qquad (5.5)$$

$$F = -K_0 \epsilon^{5/2}\, d\epsilon/dx$$

$$= -M\epsilon \qquad (5.6)$$

Où M est le débit de masse par unité de surface, F le flux conductif et ϵ l'énergie interne des <u>électrons</u> par unité de masse du <u>fluide</u>. L'ensemble du front comporte un précurseur électronique décrit par (5. 5) et (5. 6), un choc ionique où l'énergie cinétique macroscopique des ions est convertie en énergie thermique, et une zone arrière de relaxation où les températures électronique et ionique s'équilibrent.
La figure (5. 1), reproduite de SHAFRANOV, décrit la structure d'ensemble du front dans le cas plan . Nous y reviendrons plus loin dans le cas sphérique. Remarquons pour l'instant que la présence du précurseur introduit dans le bilan d'énergie une variable supplémentaire : le flux conductif vers l'avant F, et une relation $F(\epsilon)$ qui est particulièrement simple dans le cas plan, puisque le flux <u>conductif</u> d'énergie F est exactement opposé au flux advecté $M\epsilon$. Nous allons maintenant voir comment la relation $F(\epsilon)$ est modifiée dans le cas de la géométrie sphérique.

<u>Précurseur à géométrie sphérique - Effets de div(u)</u>

Soit un vent stellaire supersonique de vitesse u constante (dans

le cas d'une étoile chaude, la gravité devient négligeable à quelques rayons stellaires, nous devrons vérifier a postériori que la pression joue un rôle négligeable). Soit M le flux de masse par stéradian. Nous supposons que ce vent stellaire se termine sur un choc sphérique et que, au moins en ce qui concerne le précurseur électronique, le régime permanent constitue une bonne approximation.

$$0 = \frac{D\epsilon}{Dt} + \frac{P}{\rho} \operatorname{div} u + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} F$$

$$= u \frac{d\epsilon}{dr} + \frac{4}{3} \epsilon \frac{u}{r} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} F \qquad (5.7)$$

$$F = - K_0 \epsilon^{5/2} \frac{d\epsilon}{dr} \qquad (5.8)$$

On a négligé les échanges par relaxation ion-électron et on ne tient pas compte de la saturation de la conduction électronique. On suppose également que la pression électronique reste négligeable par rapport à la pression dynamique ρu^2, ce qui fait que la vitesse u est constante et connue a priori. On introduit les variables sans dimension :

$$x = r/r_N \; ; \quad y = \epsilon/\epsilon_N \; ; \quad \Phi = - r^2 F / G_N$$

avec :

$$\left.\begin{aligned} r_N &= M / K_0 u^5 \\ \epsilon_N &= u^2 \\ G_N &= M u^2 \end{aligned}\right\} \qquad (5.9)$$

Alors (5. 7) et (5. 8) deviennent :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{4}{3} \frac{y}{x} - \frac{d\Phi}{dx} = 0 \qquad (5.10)$$

$$\Phi = x^2 y^{5/2} \frac{dy}{dx} \qquad (5.11)$$

Le problème à résoudre est : connaissant la "température", $\epsilon = y \epsilon_N$ au point $r = x r_N$, déterminer le flux $F = - \Phi G_N / r^2$. La solution est donc a priori caractérisée par une fonction de deux variables $\Phi(x, y)$.

Mais le système (5 .10-11) est invariant vis-à-vis de la transformation.

$$x \to \lambda x \qquad y \to \lambda^{-2/5} y \qquad \varphi \to \lambda^{-2/5} \varphi$$

Soit en posant :

$$\left.\begin{aligned} z &= x^{2/5}\, y \\ \psi &= x^{2/5}\, \varphi \end{aligned}\right\} \qquad (5.12)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{d\,\mathrm{Log}\,x} + \frac{14}{15} z + \frac{2}{5}\psi - \frac{d\psi}{d\,\mathrm{Log}\,x} &= 0 \\ \psi + \frac{2}{5} z^{7/2} - z^{5/2} \frac{dz}{d\,\mathrm{Log}\,x} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.13)$$

Sous cette forme, les solutions sont invariantes par translation en Log x.

D'ailleurs, si on ne s'intéresse pas au profil du précurseur, mais seulement aux conditions aux limites, la fonction invariante $\psi(z)$ répond à la question. L'invariant z a une interprétation simple :

$$z = \left(\frac{5}{2}\,\frac{\Delta r}{r}\right)^{2/5}$$

où Δr est la longueur qu'aurait un précurseur en géométrie plane, calculée à partir de la vitesse et de la densité locales du vent sphérique. Il est donc clair que $z > 1$ quand les effets de la géométrie sphérique sont importants.

Soit x_o le point où la température s'annule. Au voisinage de x_o :

$$y \simeq \varphi \simeq \left[\frac{5}{2}(x - x_o)\right]^{2/5} \qquad (5.14)$$

La figure (5 .2) montre l'allure de la solution de (5 .10-11) On voit que pour $x/x_o \gg 1$, le profil de température tend vers une limite finie, contrairement au cas plan. Dans la région $x/x_o \gg 1$, l'énergie injectée dans le flux conductif sert à alimenter le travail $-P_e\, \mathrm{div} U$, et n'est pas rendue sous forme de flux advecté. La figure (5 .3) montre z et ψ en fonction de x/x_o

Quelques ordres de grandeur : calculons les valeurs des nombres sans dimension dans des conditions typiques.

$\mathcal{U} = 2\ 10^{3}$ pc $Ma^{-1} \simeq 2\ 10^{3}$ km s^{-1}
$M = 10^{-2}\ M_\odot\ Ma^{-1}\ srd^{-1} \simeq 10^{-7}\ M_\odot\ an^{-1}$
$r = 10^{-2}$ pc
$\epsilon_N = 10^{6}$ pc^2 Ma^{-2}
$r_N = 1.16\ 10^{-8}$ pc
$G_N = 10^{4}\ M_\odot$ pc^2 Ma^{-3} srd^{-1}
$\varkappa = 8.6\ 10^{5}$
($K_0 = 2.7\ 10^{-11}\ M_\odot$ pc^{-6} Ma^{4})

a) Choc relaxé : $\epsilon \simeq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \mathcal{U}^2$

$y = 1/4$

L'invariant $z = \varkappa^{2/5} y = 59$, et on lit sur la figure 3 :

$x/x_0 = 10^{4}$ $\quad \varphi/y \simeq 15$

Mais en fait, l'approximation consistant à supposer que le profil de vitesse en amont n'est pas perturbé n'est pas valable, puisque $\varphi \simeq 4 > 1$ c'est-à-dire que le flux conductif injecté dans le précurseur est supérieur à la puissance mécanique du vent stellaire non perturbé. Il existe toutefois un domaine de valeurs où le traitement est cohérent, comme le montre l'exemple :

b) Choc partiellement relaxé : $\epsilon = 5\ 10^{-2}\ \mathcal{U}^2$

$y = 5\ 10^{-2}$ $\quad z \simeq 12$

$\Psi \simeq 75$ $\quad \varphi \simeq 0.32$

Soit : $\varphi/y = 6.4 > 1$, mais : $\varphi < 1$, donc le traitement est cohérent.

Nous allons maintenant reprendre l'étude du précurseur en tenant compte de la relaxation ion-électron et de la saturation de la conduction électronique. L'étude ci-dessus est toutefois intéressante en soi, car la propriété d'invariance définie par (5 .12) et (5 .13) constitue une base de référence pour jauger l'effet de raffinements supplémentaires.

Précurseur sphérique - Traitement complet

La relation linéaire entre le flux et le gradient (5 .8) tombe

en défaut aux valeurs élevées de flux. Elle suppose en effet que la fonction de distribution des électrons n'est que faiblement perturbée. Une estimation grossière du flux saturé est obtenue en supposant que la distribution est totalement dissymétrique, et que les électrons se déplacent avec une vitesse d'ensemble de l'ordre de leur vitesse thermique.

$$\begin{aligned} |F_s| &= \rho \epsilon v_e \\ &= \rho \epsilon^{3/2} (m_p/m_e)^{1/2} \\ &\simeq 40 \rho \epsilon^{3/2} \end{aligned}$$

En fait, parce que la neutralité électrique doit être respectée, et que les distributions fortement anisotropes sont instables, la valeur limite est plus basse. Nous adoptons la valeur déduite par COWIE et Mc KEE (1977) :

$$|F_s| = 5 \rho \epsilon^{3/2} \qquad (5.15)$$

Nous calculons les pertes par relaxation en supposant que les ions ne sont pas notablement échauffés :

$$\left.\begin{aligned} \frac{D\epsilon}{Dt}\Big|_r &= -\epsilon / \tau_r \\ \tau_r &= \tau_0 \epsilon^{3/2} \rho^{-1} \end{aligned}\right\} \qquad (5.16)$$

Dans le système d'unités que nous avons adopté :

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 9.3\ 10^{-12}\ M_\odot\ pc^{-6}\ Ma^{+4} \\ &\simeq k_0 / 3 \end{aligned}$$

Nous ne tenons pas compte des pertes radiatives, ceci est justifié dans la Section 4.

La structure d'un précurseur stationnaire avec relaxation et éventuellement saturation est décrite, avec les mêmes variables sans dimension que précédemment, par :

$$0 = \frac{dy}{dx} + 3x^{-2} y^{-1/2} + \frac{4}{3} y x^{-1} - \frac{d\varphi}{dx} \qquad (5.17)$$

$$\varphi = x^2 y^{5/2} \frac{dy}{dx} \qquad \text{si} \quad \frac{dy}{dx} < 5 y^{-1} x^{-2} \qquad (5.18)$$

$$\varphi = 5 y^{3/2} \qquad \text{si} \quad \frac{dy}{dx} \geq 5 y^{-1} x^{-2} \qquad (5.19)$$

Conditions aux limites internes :

On peut établir par un calcul simple que le flux φ et la température y ne peuvent atteindre continûment la valeur zéro, ni en régime classique (5 .18), ni en régime saturé (5 .19). La condition limite interne est donnée par un saut simultané de flux et de température de 0 à 1/25, satisfaisant d'une part (5 .19), d'autre part (5 .17) au sens des distributions, qui impose que les sauts de discontinuité de y et φ soient égaux.

$$y(x_0^-) = \varphi(x_0^-) = 0$$
$$y(x_0^+) = \varphi(x_0^+) = 0$$

La conduction est saturée en x_0 ; si $x_0 \leq 7125/8$ elle désature immédiatement ; si $x_0 > 7125/8$, l'intégration démarre en régime saturé. La figure (5 .4) donne l'allure des solutions pour diverses valeurs de x_0. Pour des situations "naturelles", où l'énergie interne des électrons provient de l'énergie cinétique du vent, relayée par la relaxation en aval du choc, seule la partie $y \leq \frac{1}{4}$ est intéressante. Pour $x \ll 1$ et $\frac{1}{25} < y < \frac{1}{4}$, le terme de divergence $\frac{4}{3} y x^{-1}$ est négligeable par rapport au terme de relaxation $3x^{-2} y^{-1/2}$, et le front est quasi-plan ($\Delta r \ll 1$).
Pour $x \gg 1$ (et c'est le cas dans une situation typique de vent stellaire, comme on l'a vu plus haut), la relaxation est négligeable. Comme, de plus, pour $x_0 > 7125/8$, le précurseur est entièrement en régime saturé, les équations (5 .17, 5 .19) sont approximativement

$$(3x^{-2} y^{-1/2} \ll \tfrac{4}{3} y x^{-1})$$

invariant par la transformation $x \to \lambda x \quad y \to y \quad \varphi \to \varphi$
On a donc une relation "universelle" entre φ et y . Pour les besoins du calcul numérique, on pourra la représenter par :

$$\varphi = y(1 + 4y) \qquad (5.20)$$

Nous avons ainsi déterminé la relation entre le flux conductif et la température dans le précurseur. Dans des conditions typiques d'un vent stellaire d'étoile chaude, l'analyse sans effet de saturation prédit un précurseur remontant très loin dans le vent ($r_0/r \simeq 10^{-4}$),

et un excès important du flux conductif sur l'énergie advectée. La saturation de la conduction limite l'incursion du précurseur ($r_0/r \simeq 10^{-1}$) et par conséquent l'importance des "pertes" par expansion ($-p_e \, div \, u$) de sorte que $\varphi/y \leq 2$

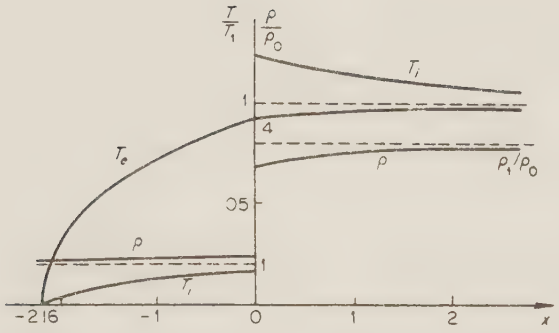


Figure 5.1 : Solution de Shafranov pour un choc fort avec conduction thermique en géométrie plane.

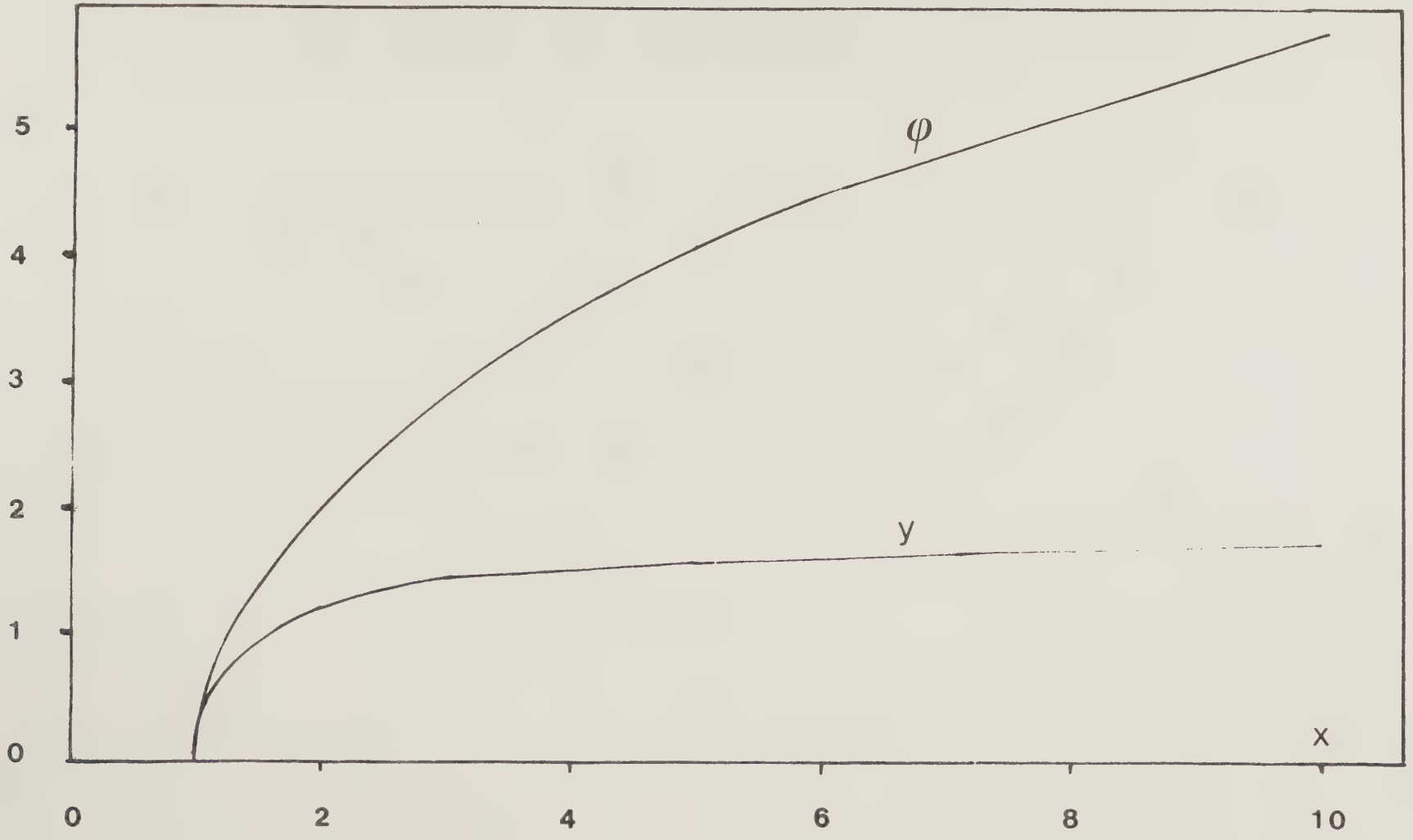


Figure 5.2 : Solution du système (5.10-11). Structure du précurseur électronique calculée en prenant en compte uniquement l'effet de la divergence du champ de vitesse.

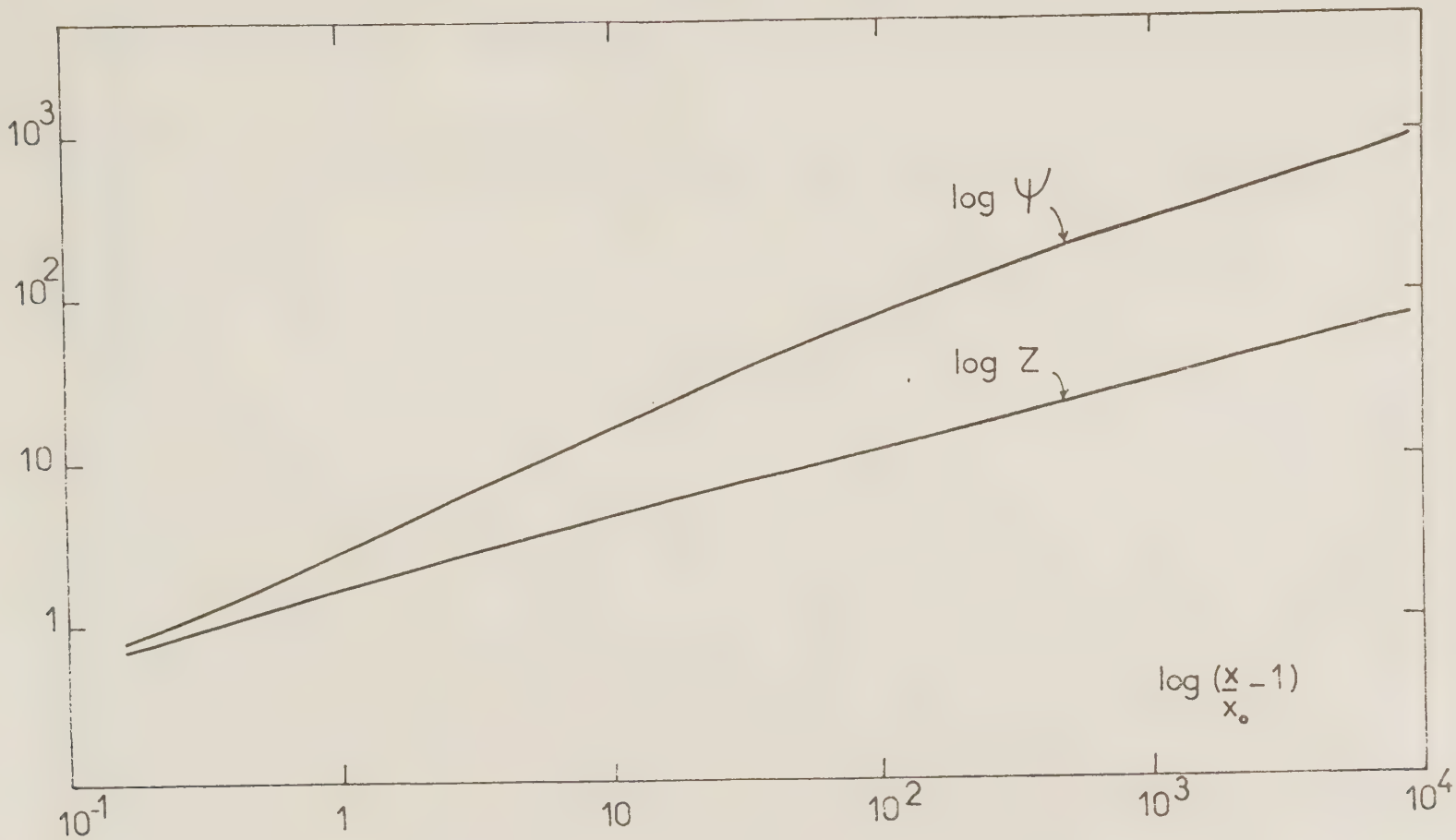


Figure 5.3 : solution du système 5.13 . Structure du précurseur en variables réduites; seuls les effets de la divergence du champ de vitesse ont été pris en compte.

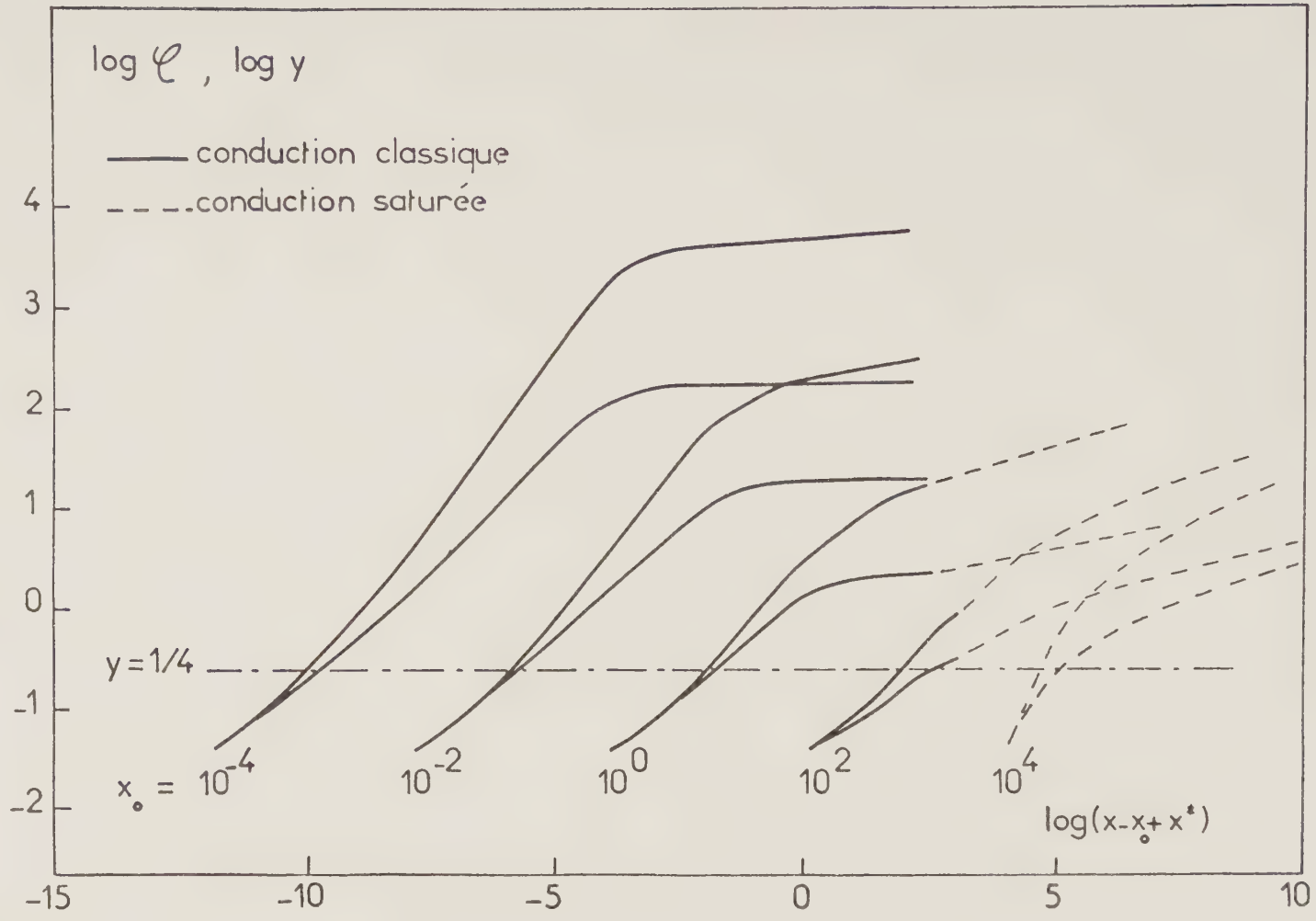


Figure 5.4 : Profils de la température normalisée y et du flux normalisé ϕ. L'origine des abscisses est transportée au point $x_o - x^*$, avec $x^* = (2/5) x_o^2 y_o^{5/2}$, qui est la position de l'extrémité du précurseur qu'on calculerait en géométrie plane et en négligeant la saturation.

Section 6

FRONTS D'EVAPORATION - CONDENSATION

1. Position du problème

Avant d'entrer dans le vif du sujet, esquissons qualitativement le problème. En l'absence de conductivité, un fluide peut présenter des interfaces de discontinuité, où température et densité sont discontinues, alors que la pression est continue. Si on tient compte de la conductivité thermique, les échanges d'énergie réchauffent le gaz froid aux dépens du gaz chaud, et la discontinuité est résorbée. Pour des conditions initiales et aux limites arbitraires, il existe une solution, et on peut en principe calculer l'évolution de chaque variable $X(r,t)$.

Les solutions stationnaires jouent un rôle particulier : ce sont celles pour lesquelles il existe un repère où les variables d'état ne dépendent pas du temps. Plus précisément, nous allons nous intéresser aux solutions stationnaires à géométrie plane, pour lesquelles l'état amont (aval dans le cas de la condensation) est un gaz ionisé à environ 10^4 K, dont le bilan thermique résulte d'un équilibre entre les pertes radiatives et le chauffage par photo-ionisation (gaz typique d'une région H II). Pratiquement, vu la décroissance rapide vers les basses températures des pertes radiatives et de la conductivité thermique, on pourra assimiler cet état à un gaz de température nulle. Du côté aval (amont pour un front de condensation), la température croît mais les solutions que nous allons étudier ne se raccordent pas à un écoulement uniforme, comme le font par exemple les fronts de choc, de détonation, ou d'ionisation. De ce point de vue, une transition d'évaporation n'est pas vraiment un front. Vers l'aval, nous allons tronquer arbitrairement la solution en un point (en mouvement par rapport au fluide) de température fixée et déterminer en ce point une relation entre pression, température, flux conductif d'énergie et flux de masse. Nous allons étudier l'importance que peuvent avoir les pertes radiatives dans le front d'évaporation.

La figure (6.1) décrit qualitativement le problème.

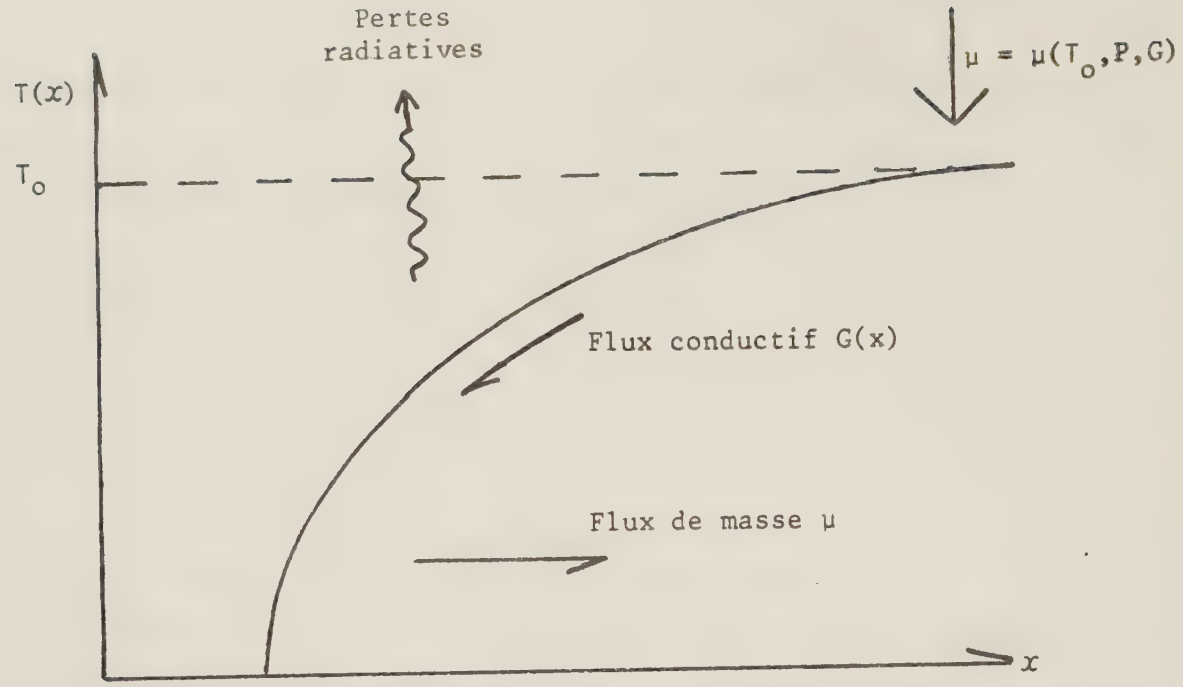


Figure 6.1 - Représentation schématique du problème posé. On cherche, pour un front stationnaire, la dépendance du flux de masse μ par rapport au flux conductif G et à la pression P, et ce au point où la température est T_o.

2. Conduction dominante

Nous commençons par étudier le cas où les pertes radiatives peuvent être soit négligées, soit traitées comme une perturbation faible.

2.1. Notations et hypothèses

μ = flux de masse

G = flux conductif, compté positivement vers les abscisses négatives

ϵ = énergie interne des électrons par unité de masse du fluide

u = vitesse

Nous supposons, sous réserve de vérification, que :

a) le couplage ion-électron est suffisant pour qu'ils soient à la même température

b) l'écoulement est subsonique

c) la conduction est non saturée

2.2. Cas conductif pur

On peut écrire directement l'intégrale première de l'équation de l'énergie (on néglige l'énergie interne du gaz amont) :

$$G = \mu (\epsilon_e + \epsilon_i) + u (p_e + p_i)$$
$$= \frac{10}{3} \mu \epsilon \qquad (6.1)$$

avec :

$$G = + K_0 \epsilon^{5/2} \, d\epsilon / dx \qquad (6.2)$$

Dans ce cas particulièrement simple, le flux de masse μ est égal au quotient du flux conductif par l'enthalpie spécifique du gaz ; il est donc proportionnel au gradient local de température. Le profil de température est donné par :

$$x = \frac{6}{50} \frac{K_0}{\mu} \epsilon^{5/2} \qquad (6.3)$$

$$\epsilon = \left(\frac{50 \mu x}{6 K_0} \right)^{2/5} \qquad (6.4)$$

et la masse par unité de surface de l'énergie zéro à l'énergie ϵ :

$$M(\epsilon) = \frac{1}{5} \frac{K_0}{\mu} A \epsilon^{3/2} \qquad (6.5)$$

Nous avons posé $A = \rho\epsilon$, qui est constant (isobare) dans la mesure où l'approximation b) est valable. Reste à voir si a), b), c) sont satisfaites.

a) Les températures ionique et électronique restent couplées tant que le temps de couplage τ_{ei} reste inférieur au temps caractéristique de variation de la température τ_ϵ.

$$\tau_\epsilon^{-1} = \epsilon^{-1} \frac{D\epsilon}{Dt}$$
$$= \epsilon^{-1} u \frac{d\epsilon}{dx}$$
$$= \mu A^{-1} \cdot \frac{10}{3} \frac{\mu}{K_0} \epsilon^{-3/2} \qquad (6.6)$$

$$\tau_{ei} = \tau_0 \epsilon^{3/2} \rho^{-1}$$
$$= \tau_0 \epsilon^{5/2} A^{-1} \qquad (6.7)$$

Comme par ailleurs (voir section 4) $k_0 = 3 z_0$, on conclut que les ions et les électrons sont bien couplés du côté froid et commencent à se découpler à la température :

$$\epsilon_{dec} = \frac{9}{10} A^2 \mu^{-2} \simeq A^2 \mu^{-2} \tag{6.8}$$

b) L'écoulement reste subsonique tant que :

$$u^2 < \epsilon_e + \epsilon_i = 2\epsilon \tag{6.9}$$

$$\epsilon < \epsilon_{son} = 2 A^2 \mu^{-2} \tag{6.10}$$

c) La conduction électronique sature lorsque le flux s'approche de la valeur saturée :

$$G_s = 5 \rho \epsilon^{3/2}$$

$$G = \frac{10}{3} \mu \epsilon < G_s$$

$$u \leq \frac{3}{2} \epsilon^{1/2} \tag{6.11}$$

Cette dernière condition est quasiment équivalente à (6.9). Ainsi, les trois conditions a), b), c) ont toutes à peu près le même domaine de validité :

$$\epsilon \leq \epsilon_m \simeq A^2 \mu^{-2} \tag{6.12}$$

2.3. Pertes radiatives - Traitement en perturbation

Calculons l'importance des pertes radiatives dans le cas où elles sont suffisamment faibles pour ne pas perturber notablement les profils de vitesse et de densité. La puissance rayonnée par unité de surface pour la tranche d'écoulement comprise entre les températures zéro et ϵ est donnée par :

$$R(\epsilon) = \int_0^{\epsilon} \rho^2(\epsilon) \Lambda(\epsilon) \, dx \tag{6.13}$$

$$= \frac{3}{10} A^2 \frac{k_0}{\mu} \int_0^{\epsilon} \epsilon^{-1/2} \Lambda(\epsilon) \, d\epsilon$$

$$= \frac{3}{10} A^2 \frac{k_0}{\mu} J(\epsilon) \tag{6.14}$$

Nous adoptons pour $\Lambda(\epsilon)$ l'approximation analytique définie dans la section 4. La fonction $J(\epsilon)$ est repésentée sur la figure (6.2). Le

calcul ci-dessus est valable si la puissance rayonnée $R(\epsilon)$ est faible devant le flux conductif calculé sans pertes radiatives.
Remarquons que $R(\epsilon)$ peut aussi s'écrire :

$$R(\epsilon) = \frac{A^2 K_0}{G(\epsilon)} \cdot \epsilon J(\epsilon) \qquad (6.15)$$

A une énergie ϵ et une "pression" A fixées, les pertes radiatives sont d'autant plus faibles que le flux conductif est plus grand (on ne prête qu'aux riches !). Le calcul en perturbation des pertes radiatives tombe en défaut quand $R(\epsilon)$ est comparable à $G(\epsilon)$, soit pour :

$$G \simeq A\left[K_0 \epsilon J(\epsilon)\right]^{1/2}$$

Cette limite sera précisée au paragraphe 4.

3. Cas où la conduction est négligeable

Dans ce cas, pour un écoulement stationnaire, électrons et ions relaxés (à la même température), l'équation de (non -) conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{10}{3}\rho\mu\epsilon\right] = -\rho^2 \Lambda(\epsilon) \qquad (6.16)$$

Donc l'expression recherchée du flux de masse en fonction du flux conductif (ou, ce qui revient au même, du gradient de température) s'écrit :

$$\mu = -\frac{3}{10}\frac{A^2 \epsilon^{-2} \Lambda(\epsilon)}{d\epsilon/dx} \qquad (6.17)$$

L'épaisseur de l'écoulement jusqu'à la température ϵ s'écrit :

$$x(\epsilon) = \frac{10}{3}(-\mu)\frac{1}{A^2}\int_0^{\epsilon} \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{\Lambda(\epsilon)}$$

$$= \frac{10}{3}(-\mu)\frac{L(\epsilon)}{A^2} \qquad (6.18)$$

La fonction $L(\epsilon)$ est représentée figure 6.3.
La masse contenue dans l'écoulement jusqu'à la température ϵ est donnée par :

$$M(\epsilon) = \frac{10}{3}(-\mu)\frac{1}{A}\int_0^{\epsilon} \frac{\epsilon d\epsilon}{\Lambda(\epsilon)}$$

$$= \frac{10}{3}(-\mu)\frac{1}{A} N(\epsilon) \qquad (6.19)$$

La fonction $N(\epsilon)$ est représentée figure 6.4.

En rapprochant le résultat (6.17) des équations (6.1) et (6.2), on constate que le flux de masse a changé de signe ; il est dans le cas présent inversement proportionnel au gradient de température. Le domaine de validité de (6.17) correspond aux faibles valeurs du gradient $d\epsilon/dx$ et du flux conductif, contrairement à ce qui est le cas pour (6.1). Comme dans le cas précédent (conduction dominante) il reste à vérifier que les conditions de validité du traitement sont remplies.

a) D'après la comparaison faite dans la section 4 entre temps radiatif et temps d'équipartition, dans la situation présente, où le temps d'évolution est dicté par les pertes radiatives, la relaxation ion-électron est sûrement bien réalisée.

b) Le nombre de Mach local est :

$$\mathcal{M} = \frac{u}{(2\epsilon)^{1/2}} = \mu A^{-1} (\epsilon/2)^{1/2}$$

Il décroît vers le côté froid (aval). Il suffit donc que l'écoulement au point de raccordement amont soit subsonique pour qu'il le reste vers l'aval.

c) Si la conduction est négligeable en régime classique, elle l'est à fortiori en régime saturé. Or le cas limite présentement étudié est celui des faibles valeurs du gradient $d\epsilon/dx$, où la conduction devient négligeable.

Il reste à étudier le :

4. Régime de transition

C'est celui où conduction et pertes radiatives jouent toutes deux un rôle non négligeable. La structure du front est décrite par le système différentiel :

$$\frac{dG}{dx} - \frac{10}{3}\mu \frac{d\epsilon}{dx} - A^2 \epsilon^{-2} \Lambda(\epsilon) = 0 \qquad (6.20)$$

$$G = K_0 \epsilon^{5/2} \frac{d\epsilon}{dx} \qquad (6.21)$$

Le changement de variables : $\zeta = A\,H ; x = Z/A ; \mu = A\eta$ conduit aux équations suivantes, où la pression n'apparaît plus :

$$\frac{dH}{dz} - \frac{10}{3}\,\eta\,\frac{d\epsilon}{dz} + \epsilon^{-2}\,\Lambda(\epsilon) = 0 \qquad (6.22)$$

$$H = K_0\,\epsilon^{5/2}\,\frac{d\epsilon}{dz} \qquad (6.23)$$

Remarquons que dans le cas critique ($\mu = 0$) on trouve le flux conductif H_{crit} par une simple quadrature en éliminant z du système (6.22-23) :

$$H_{crit} = \left[2\,K_0\,K(\epsilon)\right]^{1/2} \qquad (6.24)$$

$$K(\epsilon) = \int_0^{\epsilon} \epsilon^{1/2}\,\Lambda(\epsilon)\,d\epsilon \qquad (6.25)$$

La fonction $K(\epsilon)$ est représentée figure 6.5.

Par ailleurs, on peut procéder à une série d'intégrations du système (6.22-23), ce qui fournit $H(\epsilon, \eta)$, d'où on peut tirer : $\eta(H, \epsilon)$

Pour les applications numériques, on peut obtenir une bonne approximation de $\eta(H,\epsilon)$ de la façon suivante : on combine les comportements asymptotiques trouvés aux paragraphes 2 et 3, ce qui donne :

$$\eta_0 = \frac{3}{10}\,\frac{H}{\epsilon} - \frac{3}{10}\,\frac{K_0\,\epsilon^{1/2}\,\Lambda(\epsilon)}{H} \qquad (6.26)$$

On remarque que $\eta_0(H_{crit}, \epsilon) \neq 0$; et on y remédie en définissant :

$$\eta_1(H,\epsilon) = \eta_0(H,\epsilon) - \eta_0(H_{crit},\epsilon) \qquad (6.27)$$

où H_{crit} est défini par (6.24) et (6.25). La figure (6.6) permet de comparer la valeur exacte $\eta(H,\epsilon)$ déduite d'une famille d'intégrations du système (22-23) avec la valeur $\eta_1(H, \epsilon = 10^4)$ ($T = 10^6$ K). On constate que l'accord est tout-à-fait satisfaisant. La figure (6.7) donne les profils de "température" ϵ en fonction de l'abscisse réduite z pour quelques valeurs du débit-masse réduit η . Le tableau ci-dessous résume les expressions aymptotiques des principales grandeurs intéressantes dans les deux régimes limites, avec entre parenthèses les valeurs numériques pour $\epsilon = 10^4$ ($T = 10^6$ K).

	Conductif	Radiatif
Distance depuis le gaz froid	$\frac{2}{5} K_0 \epsilon^{7/2} G^{-1}$ $(1.1\ 10^3\ G^{-1})$	$K_0 \epsilon^{1/2} \Lambda(\epsilon) L(\epsilon) G^{-1}$ $(5.5\ 10^2\ G^{-1})$
Densité surfacique depuis le gaz froid	$\frac{2}{3} K_0 \epsilon^{5/2} A G^{-1}$ $(0.18\ A G^{-1})$	$K_0 \epsilon^{1/2} \Lambda(\epsilon) N(\epsilon) A G^{-1}$ $(0.07\ A G^{-1})$

5. Stationnaire, pourquoi faire ?

Nous avons étudié dans ce qui précède les solutions stationnaires de la transition entre un gaz chaud et un gaz froid. On pourrait reprocher à ces solutions d'être de peu d'utilité, car elles ne semblent pas "naturelles" : elles ne relient pas deux régions d'écoulement uniforme (ρ, u constants) comme le font, par exemple, les solutions trouvées par PENSTON ET BROWN (1970) pour l'interface des deux phases neutres (froide et tiède) du milieu interstellaire, ou pour Mc KEE et COWIE (1977) pour l'évaporation d'un nuage en géométrie sphérique. Les deux problèmes traités par ces auteurs diffèrent de celui que nous nous sommes posé. Le premier parce qu'il se situe dans un domaine de température où $\Lambda(\epsilon)$ s'annule à trois reprises, dont deux correspondant à des états stables, qui sont les états finaux. Le second parce que la géométrie sphérique permet d'avoir un flux intégré non nul à l'infini avec un gradient suffisamment faible pour que la température tende vers une limite finie. Dans ces deux cas, le flux de masse est une valeur propre du problème, alors que dans le cas plan, il est simplement contraint par une relation avec le flux conductif.

N'étant pas raccordées à un écoulement uniforme (du côté "chaud"), les solutions que nous avons trouvées semblent requérir des conditions aux limites très particulières : en effet, la température et le flux doivent être constants en un point qui est mobile par rapport au fluide.

Mais cette dernière condition est pratiquement réalisée pourvu

que l'échelle de temps de variation des conditions aux limites soit grande par rapport à une échelle de temps de l'écoulement interne (c'est-à-dire du côté froid) par rapport à ce point. Une telle échelle de temps est donnée, par exemple, par $\mu^{-1} M(\epsilon) = \tau(\epsilon)$. Or (voir formules 6.5, 6.19 et figure 6.4) ce temps caractéristique décroît rapidement quand la température décroît. Donc, étant donné un problème, ayant un temps caractéristique d'évolution globale τ_g , et présentant un front de conduction, la partie du front de conduction dont le temps caractéristique $\tau(\epsilon) \ll \tau_g$ est en quasi-équilibre.

Ce résultat est capital pour le calcul numérique : la décroissance rapide du temps caractéristique de l'écoulement vers le côté froid du front impose un pas de temps démesurément petit par rapport à celui que requièrent les autres parties du problème. C'est la disparité même de ces temps caractéristiques qui permet de traiter analytiquement et en quasi-équilibre la partie de l'écoulement qui aurait sans cela été extrêmement coûteuse à traiter en numérique, discrétisé, instationnaire.

Ainsi, les résultats de l'étude qui précède servent à remplacer une zone où le calcul hydrodynamique est mal adapté par des conditions aux limites résumant la structure d'une zone quasi stationnaire. Le point de raccordement doit être choisi pour que l'approximation quasi stationnaire soit valable ; il peut être commode de le prendre tel que l'épaisseur et la masse de la région traitée analytiquement puissent être négligées. Pratiquement, on choisit la température de raccordement ϵ_o comme au plus égale à une fraction (par exemple 1/4) de la température maximum dans le problème. On s'assure à posteriori que les conditions requises sont bien remplies.

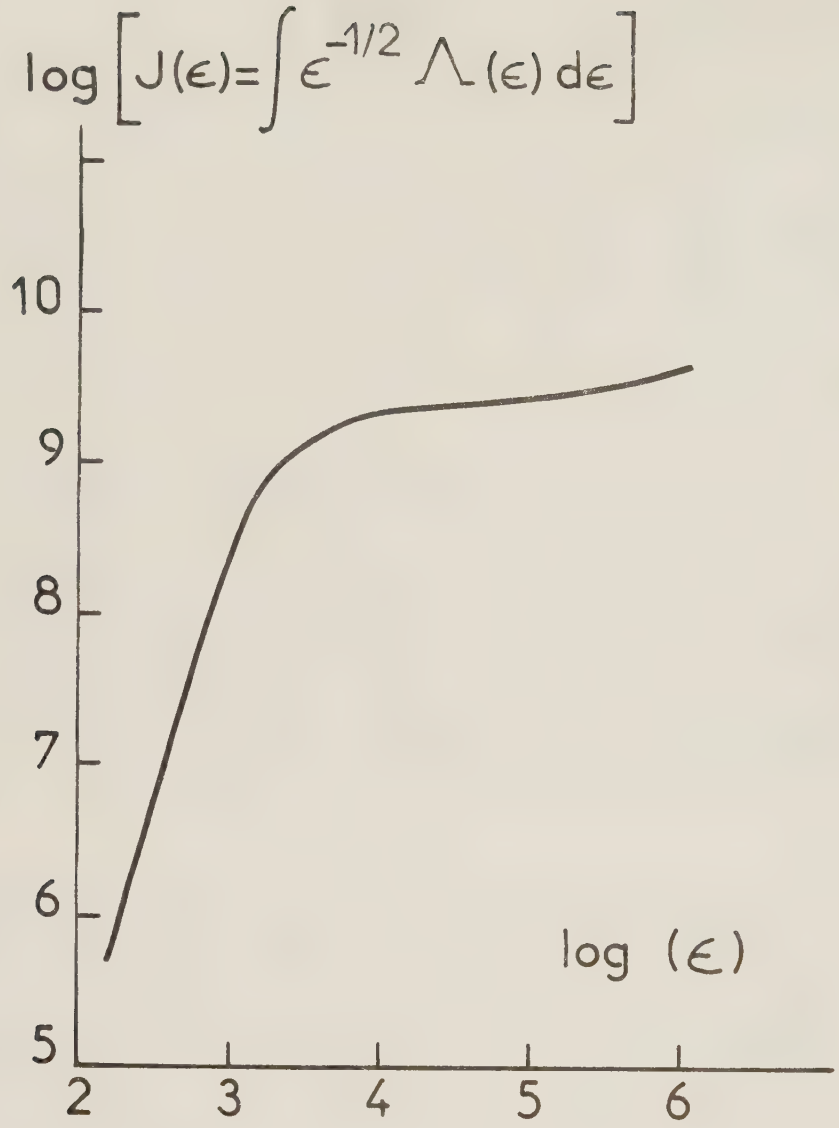


Figure 6.2 : Fonction J(ε) donnant, en unités réduites, les pertes radiatives dans un front à conduction dominante.

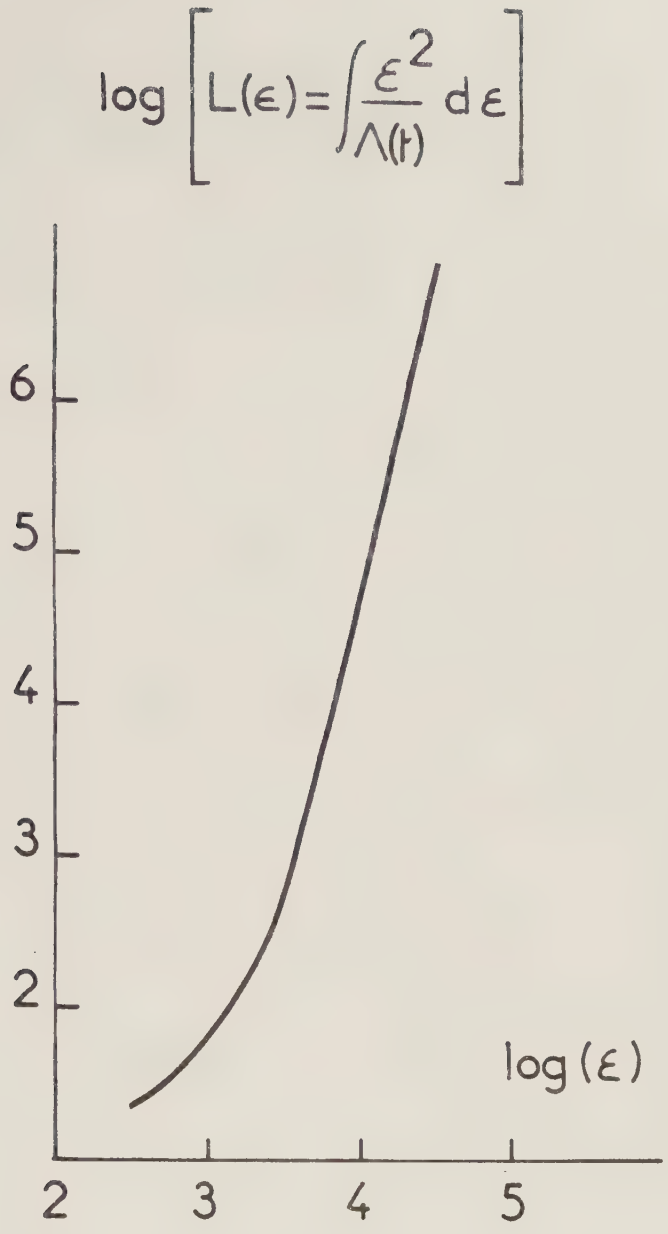


Figure 6.3 : Fonction L(ε) donnant, en unités réduites, l'épaisseur d'un front de condensation où la conduction est négligeable.

$$\log\left[N(\epsilon)=\int\frac{\mathcal{E}}{\Lambda(t)}\,d\epsilon\right]$$

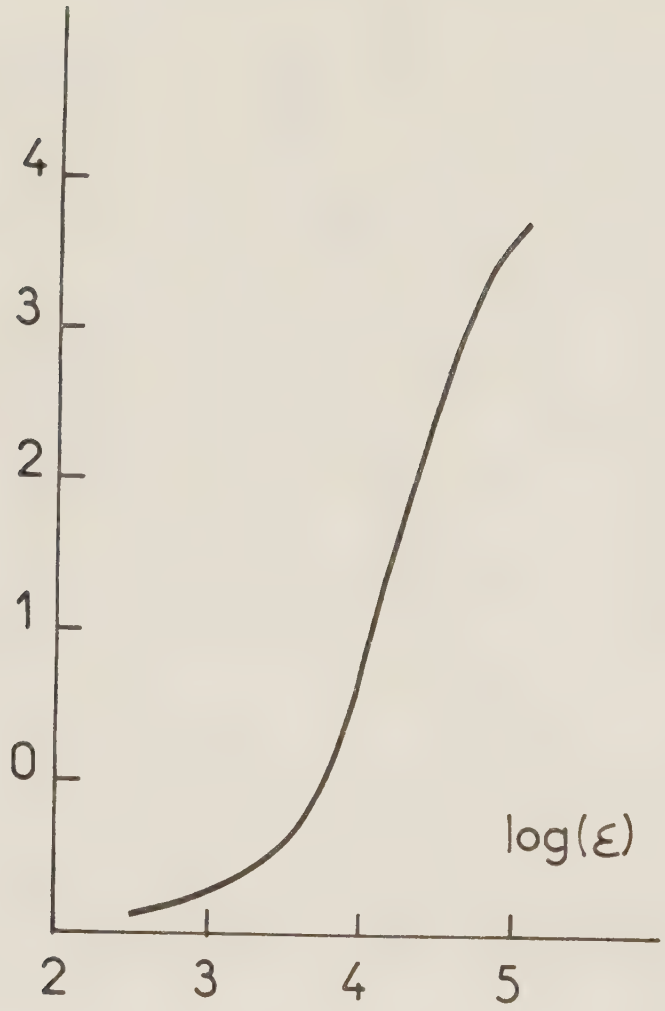


Figure 6.4 : Fonction N(ε) donnant la masse surfacique dans un front de condensation où la conduction est négligeable.

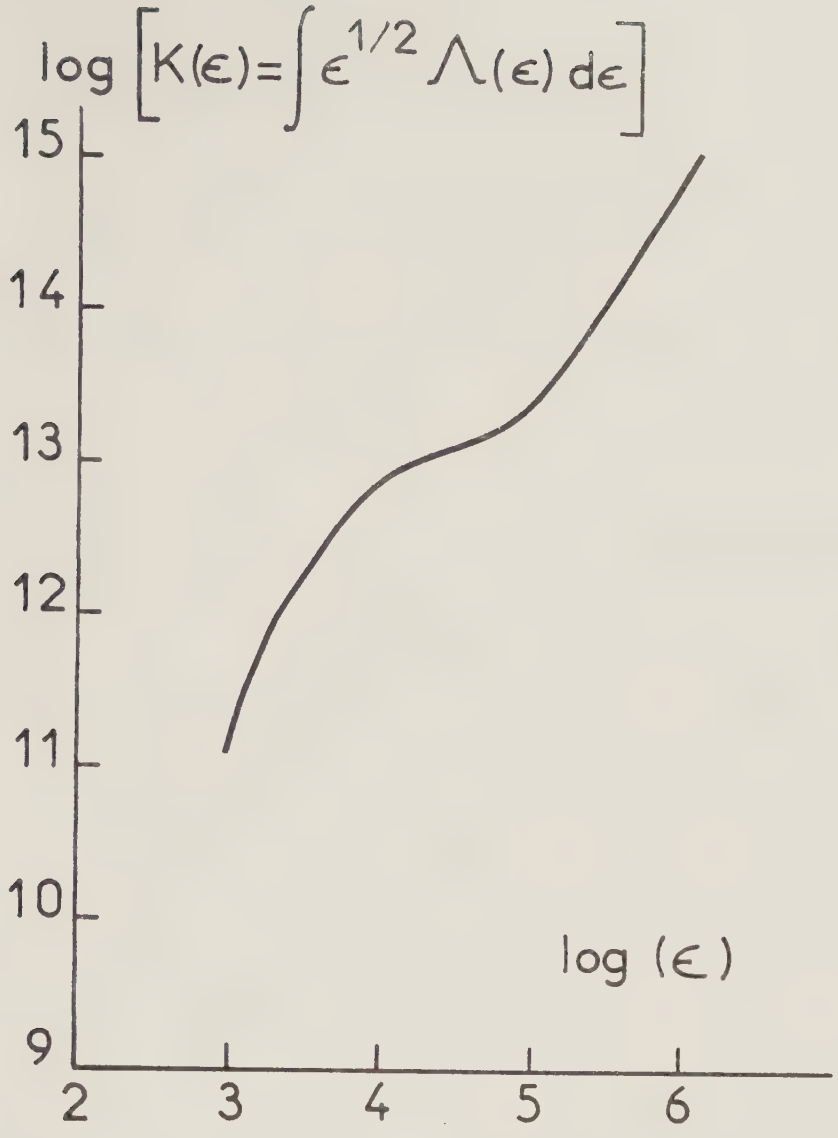


Figure 6.5 : Fonction K(ε) donnant le flux conductif critique à la transition évaporation-condensation.

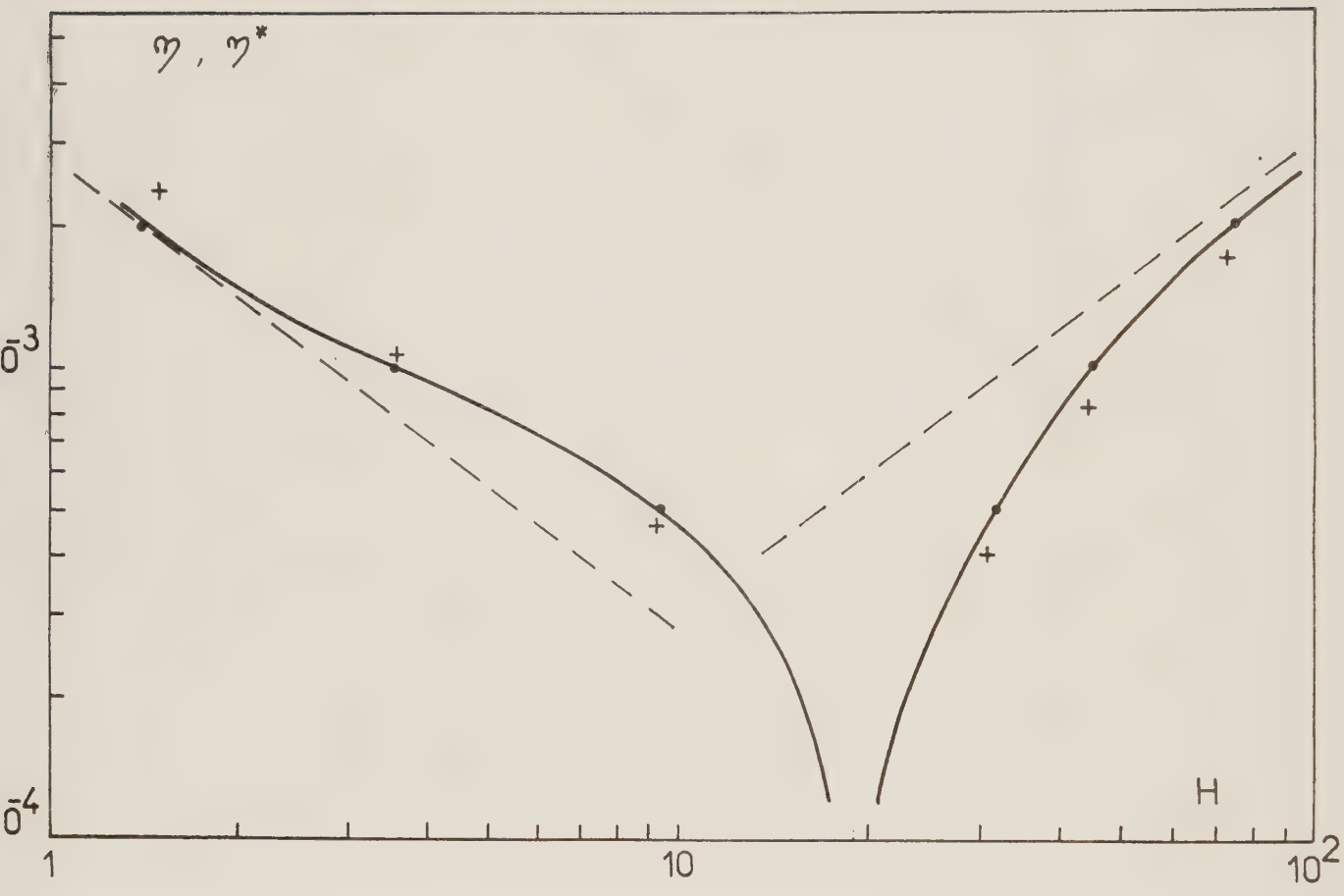


Figure 6.6 : Débit-masse réduit en fonction du flux conductif.
Valeurs exactes $\eta(H)$ pour $\varepsilon=10^4$ pc^2 Ma^{-2} : trait plein
Comportement asymptotique : tirets
Approximation adoptée : croix +

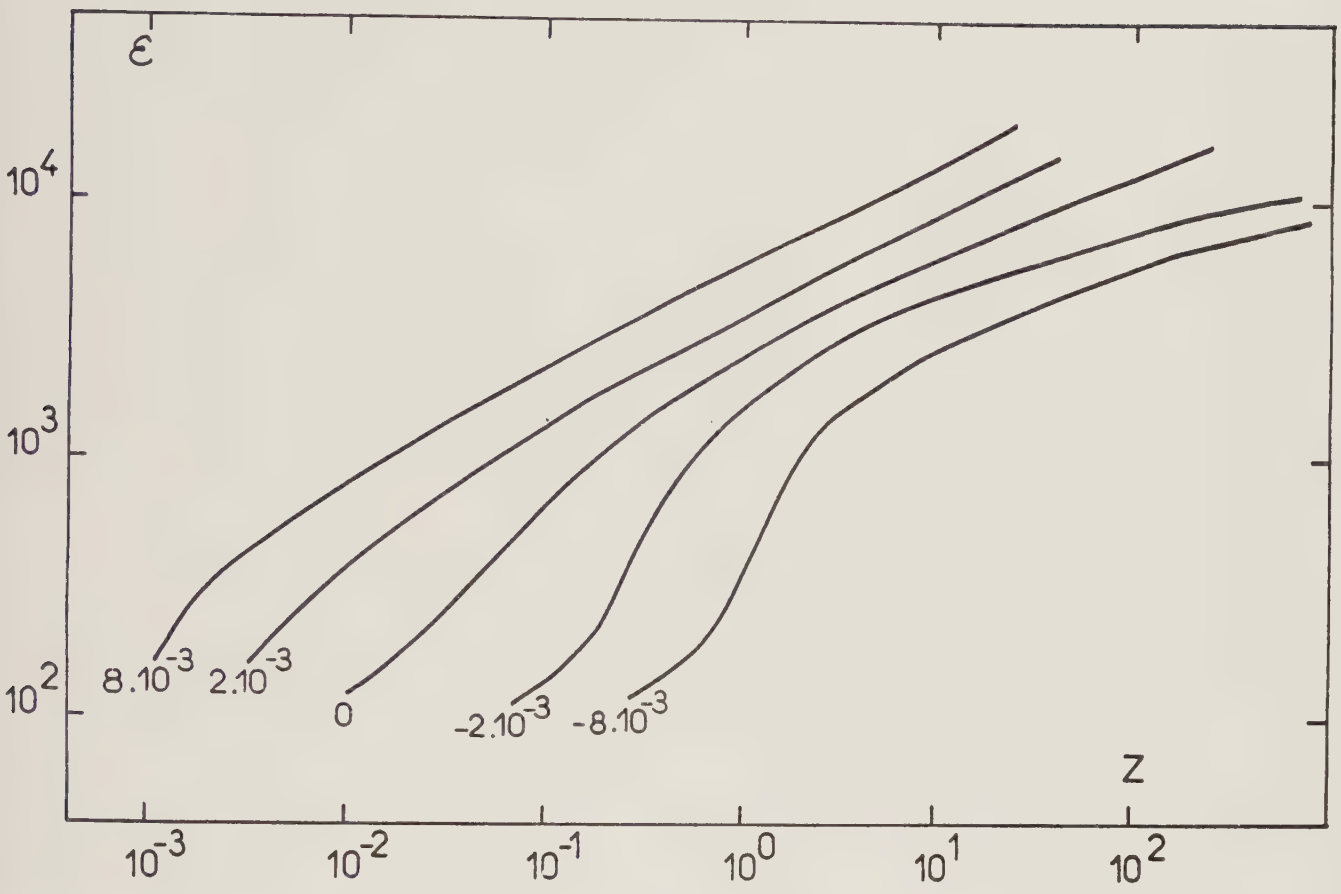


Figure 6.7 : Profils de "température" ε en variables réduites pour quelques solutions au voisinage de la solution critique. Les courbes sont étiquetées par le débit-masse η.

Section 7

MISE EN EQUATIONS

REBONTIER

Ah ! Monsieur ! Je prends cette paire, je crois qu'elle m'ira bien. Combien la vendez-vous, s'il vous plaît, sire Savetier ?

SCYTOTOMILLE

Quatorze francs, parce que vous honorez les savetiers.

ACHRAS

Vous avez eu tort, voyez-vous bien, de ne point prendre les -voyez vous bien- pour fiant de gendarme. Cà vous aurait fait plus d'usage.

REBONTIER

Vous avez raison, Monsieur. Sire Savetier, je prends cette autre paire.
(Il s'en va.)

SCYTOTOMILLE

Eh ! Le paiement, Monsieur ?

REBONTIER

Puisque je les ai changés contre les... machins pour homme entre deux âges.

SCYTOTOMILLE

Vous n'avez pas payé ceux-là non plus.

ACHRAS

Puisqu'il ne les prend pas, voyez-vous bien.

SCYTOTOMILLE

C'est juste.

ACHRAS (à REBONTIER)

C'est un truc qui n'est point neuf, voyez-vous bien ; mais pour un savetier en vieux, c'est plus voyez-vous bien, proportionné : il le ressemellera.

A. JARRY
UBU COCU III,4

1. Démarche suivie

La mise en équations du problème comporte trois étapes indépendantes :
a) Etablissement des équations différentielles aux dérivées partielles et des conditions aux limites.
b) Choix d'une discrétisation pour les dérivées spatiales.
c) Choix d'un schéma de progression dans le temps.

Nous n'exposerons en détail que le premier point, et nous nous contenterons de souligner les aspects les plus importants des deux autres étapes.

L'ensemble de la nébuleuse est, en ce qui concerne le traitement numérique, divisé en quatre régions :
a) Précurseur électronique en amont du choc interne.
b) Région coronale discrétisée.
c) Front d'évaporation - condensation.
d) Région nébulaire.
Remarquons que la distinction entre les régions b et c n'existe que du point de vue numérique ; la division entre les deux est faite selon les critères exposés dans la Section 6 (front d'évaporation). Inversement, la région nébulaire peut éventuellement contenir, dans le cadre d'un traitement numérique unique, des régions de nature physique variée : zone neutre, choc isotherme, front d'ionisation de type R ou D, zone ionisée.

Les régions a et c sont traitées par des méthodes essentiellement analytiques. Leur structure est obtenue préalablement au calcul des modèles proprement dits par intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires indépendantes du temps (voir Sections 5 et 6). Les résultats de ces intégrations sont ensuite utilisés comme conditions aux limites au cours du calcul d'un modèle.

Les régions b et d sont traitées numériquement, ce qui amène à discrétiser la variable d'espace et à les diviser en zones. Nous utilisons un traitement lagrangien, ce qui signifie que chaque zone représente une masse constante de gaz, et que les frontières des zones sont comouvantes avec le fluide (à l'exception toutefois des interfaces de la région b avec les régions a et c et des redéfinitions de maillage lors du rezonage, qui seront exposées plus loin).

2. Point courant de la région coronale

Dans la région coronale, la longueur de Debye est de l'ordre du kilomètre, très inférieure aux dimensions du système. On peut donc admettre que la neutralité électrique macroscopique est respectée et que les fluides électronique et ionique ont une même vitesse hydrodynamique u. On admet qu'ils sont séparément maxewellisés, ce qu'on pourra vérifier a posteriori en comparant les temps de thermalisation τ_{ee} et τ_{ii} à l'âge du système. Le temps d'équipartition, τ_{ei}, par contre, peut ne pas être négligeable. On va donc écrire deux équations séparées pour les énergies spécifiques ionique et électronique. En l'absence de tout processus d'échange d'énergie autre que le travail des forces de pression, on écrit simplement l'évolution adiabatique séparée de deux fluides :

$$\frac{D}{Dt} \text{Log}\, \epsilon_\alpha = \frac{2}{3} \frac{D}{Dt} \text{Log}\, \rho \qquad \alpha = e, i \tag{7.1}$$

Les lecteurs qui seraient troublés par l'escamotage apparent des forces électrostatiques qui couplent les deux fluides pourront se référer au calcul de HUNDHAUSEN et MONTGOMERY (1971). Faisant explicitement figurer le champ électrostatique au départ du calcul, ils montrent que, si on néglige l'impulsion et l'énergie cinétique macroscopique des électrons vis-à-vis de celles des protons, on peut écrire des équations où $\underset{\sim}{E}$ ne figure pas. Récrivons leur équation (6) dans nos notations, sans les termes de couplage :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon_e) + \text{div}\left[\underset{\sim}{u}(\rho \epsilon_e + p_e)\right] = \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{\text{grad}}(p_e) \tag{7.2}$$

En utilisant l'équation de conservation de la masse, cette équation se ramène immédiatement à (7.1).

Les équations complètes de l'énergie pour les ions et les électrons s'écrivent :

$$\frac{D}{Dt}(\epsilon_i) + \frac{1}{\rho} p_i \,\text{div}(\underset{\sim}{u}) + \frac{1}{\rho} \text{div}(\underset{\sim}{F_i}) + (\epsilon_i - \epsilon_e)/\tau_{ei} = 0 \tag{7.3}$$

$$\frac{D}{Dt}(\epsilon_e) + \frac{1}{\rho} p_e \,\text{div}(\underset{\sim}{u}) + \frac{1}{\rho} \text{div}(\underset{\sim}{F_e}) + (\epsilon_e - \epsilon_i)/\tau_{ei} = 0 \tag{7.4}$$

où F_i et F_e sont les flux conductifs, τ_{ei} le temps d'équipartition, et Λ la fonction de refroidissement (voir Section 4). Afin d'assurer un comporte-

ment régulier au voisinage de la saturation, les flux sont calculés comme suit :

$$F_{e,c} = -K_e(\epsilon_e)\,\frac{d\epsilon_e}{dr}$$
$$F_{e,s} = \mathrm{sign}(F_{e,c}) \times 5\rho\epsilon_e^{3/2}$$
$$F_e = (F_{e,c}^{-1} + F_{e,s}^{-1})^{-1} \qquad (7.5)$$

avec des formules analogues pour les ions.

Les équations de l'impulsion et de la masse n'appellent pas de commentaire particulier ; elles s'écrivent :

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}(P_i + P_e) = 0 \qquad (7.6)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\mathrm{div}(\underline{u}_m) = 0 \qquad (7.7)$$

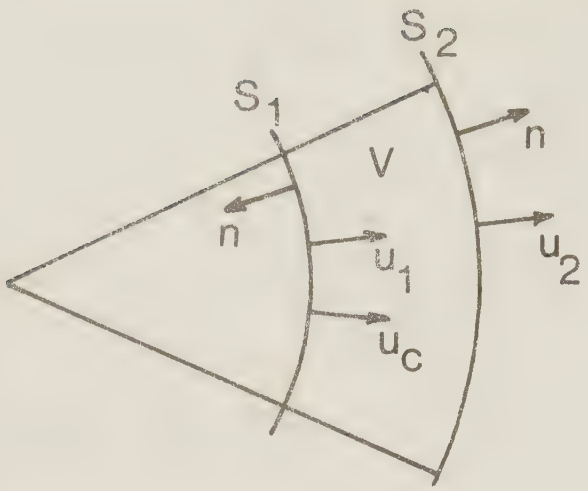
La faible valeur de la densité, la température élevée et la grande intensité du rayonnement Lyman-continuum assurent que l'ionisation est complète et que la zone coronale est transparente au flux ultraviolet.

3. Choc interne

Nous appelons choc interne le choc qui assure la transition supersonique-subsonique du vent stellaire. Nous allons traduire les relations de conservation sous une forme qui, d'une part généralise les relations d'Hugoniot Rankine au cas où les ions et les électrons peuvent être à des températures différentes, et où la conduction intervient dans le bilan d'énergie, et d'autre part soit adaptée au traitement numérique lagrangien.

Ecrivons le bilan d'énergie interne électronique pour le volume $\mathcal{V}$ délimité par :

- une surface S_1 située juste en avant du front de choc, et mouvante avec lui ;
- une surface S_2 située juste derrière le choc, et mouvante avec le fluide ;
- un angle solide de 1 stéradian.



u_1 u_2 Vitesses du fluide

u_c Vitesse du choc

Figure 7.1 : Volume de contrôle pour le bilan d'énergie.

Pour alléger l'écriture, nous laissons momentanément de côté les termes de conduction, relaxation, rayonnement, dont l'adjonction a posteriori ne pose pas de problème ; nous omettons l'indice "e".

$$\frac{d}{dt}\int_v \rho\epsilon = \int_v \frac{\partial}{\partial t}(\rho\epsilon) + \int_{S_2} \underset{\sim}{u_2}\cdot\underset{\sim}{n}\,\rho\epsilon + \int_{S_1} \underset{\sim}{u_1}\cdot\underset{\sim}{n}\,\rho\epsilon$$

Transformons le premier terme en utilisant (7.2) mise sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\epsilon) = -\,div(\underset{\sim}{u}\cdot\rho\epsilon) - p\,div(\underset{\sim}{u})$$

$$\frac{d}{dt}\int_v \rho\epsilon = -\int_{S_2} \underset{\sim}{u_2}\cdot\underset{\sim}{n}\,\rho\epsilon - \int_{S_1} \underset{\sim}{u_1}\cdot\underset{\sim}{n}\cdot\rho\epsilon + \int_v p\cdot\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial r}\right)\rho + \int_{S_2} \underset{\sim}{u_2}\cdot\underset{\sim}{n}\cdot\rho\epsilon + \int_{S_1} \underset{\sim}{u_c}\cdot\underset{\sim}{n}\,\rho\epsilon$$

Dans la mesure où la structure de la région de compression dans le front de choc peut être considérée comme stationnaire pendant le temps mis par un élément de fluide pour traverser le choc (hypothèse habituellement faite pour établir les relations de passage) :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial r}\right)\rho = (u-u_c)\frac{\partial\rho}{\partial r}$$

d'où :

$$\frac{d}{dt}\int_v(\rho\epsilon) = \int_v p\,\frac{1}{\rho}(u-u_c)\frac{\partial\rho}{\partial r} + (u_1-u_c)S_1(\rho\epsilon)_1$$

$$= \int_v \frac{2}{3}\epsilon\frac{\mu}{S\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r} + \mu\epsilon_1$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} (\rho\epsilon) = \mu\epsilon_1\left(1+\frac{2}{3}\,\mathrm{Log}\,\rho_2/\rho_1\right) \qquad (7.8)$$

Nous avons introduit $\mu = r^2\rho_1(u_1-u_c)$, débit-masse par stéradian au travers du choc, et utilisé le fait que la conduction impose la continuité de la température électronique au travers du choc. Nous sommes arrivés, lourdement mais sûrement, au résultat que le bilan (partiel) d'énergie du volume $\mathcal{V}$ comprend l'énergie interne du fluide amont, bonifiée par la compression isotherme dans le choc. On peut montrer simplement (voir SHAFRANOV, 1957) que le terme de compression isotherme $p_e\,\mathrm{Log}\,\rho_2/\rho_1$ correspond à une discontinuité de flux conductif. Mais, pour une raison technique (le flux conductif n'est pas une variable indépendante, et il n'est pas aisé de lui imposer directement une condition aux limites) nous avons préféré établir le résultat (7.8) qui porte sur le bilan d'énergie d'une zone contenant le choc. Restituons les termes non hydrodynamiques du bilan d'énergie :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}(\rho\epsilon) = \mu\epsilon_1\left(1+\frac{2}{3}\,\mathrm{Log}\,\rho_2/\rho_1\right) + S_1F_p - S_2F_2 - \mathcal{V}\left[\rho^2\Lambda(\epsilon_e) + \rho(\epsilon_e-\epsilon_i)/\tau_{ei}\right] \qquad (7.9)$$

Dans cette expression, F_2 est le flux conductif à la surface S_2 , qui est fonction du gradient de température électronique derrière le choc, alors que F_p est (avec une convention de signe opposée) le flux conductif investi dans le précurseur électronique, tel qu'il a été calculé dans la Section 5.

Nous allons par ailleurs établir le bilan de l'énergie totale du fluide contenu dans $\mathcal{V}$, en rétablissant l'indice $\alpha = e, i$:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \rho\left(\epsilon_i+\epsilon_e+\tfrac{1}{2}u^2\right) = -S_1u_c\rho_1\left(\epsilon_{i1}+\epsilon_{e1}+\tfrac{1}{2}u_1^2\right) + S_2u_2\rho_2\left(\epsilon_{i2}+\epsilon_{e2}+\tfrac{1}{2}u_2^2\right) + S_1F_p - S_2\left(F_{e2}+F_{i2}\right) - \mathcal{V}\rho_2^2\Lambda(\epsilon_{e2}) + \int_{\mathcal{V}}\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\epsilon_i+\epsilon_e+\tfrac{1}{2}u^2\right)\right]$$

On peut transformer le dernier terme en utilisant la forme eulerienne conservative de la troisième équation de l'hydrodynamique ; il vient :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \rho\left(\epsilon_i+\epsilon_e+\tfrac{1}{2}u^2\right) = S_1(u_1-u_c)\rho_1\left(\epsilon_{i1}+\epsilon_{e1}+\tfrac{1}{2}u_1^2\right) + S_1u_1\left(p_{e1}+p_{i1}\right) - S_2u_2\left(p_{e2}+p_{i2}\right) + S_1F_p - S_2\left(F_{e2}+F_{i2}\right) - \mathcal{V}\rho_2^2\Lambda(\epsilon_{e2}) \qquad (7.10)$$

Dans les deux premiers termes, qui représentent la partie hydrodynamique du flux d'énergie entrant dans ϑ, figurent la vitesse amont u_1 et l'énergie interne ionique amont ϵ_1. Nous pourrions, en conformité avec l'approximation faite dans la Section 5, assimiler ϵ_1 à zéro et u_1 à la valeur qu'elle avait en amont du précurseur. Dans ces conditions, la somme de $S_1 u_1 \rho_1 \epsilon_1$ et $S_1 F_p$, qui est négative et représente le "déficit" énergétique du précurseur électronique, serait également portée en déficit au budget énergétique global. Or, les "pertes" du gaz d'électrons dans le précurseur (voir Section 5) sont en fait cédées aux ions, soit sous forme d'énergie interne (relaxation), soit sous forme d'énergie mécanique (p div(u)). Autrement dit, quels que soient les échanges d'énergie entre les deux composantes du plasma dans le précurseur, le flux d'énergie total est conservé et la somme :

$$L = S_1 u_1 \rho_1 \left(\epsilon_{i1} + \epsilon_{e1} + \frac{1}{2} u_1^2\right) + S_1 u_1 \left(P_{e1} + P_{i1}\right) + S_1 F_p \qquad (7.11)$$

est égale à la luminosité mécanique L_w du vent stellaire, qui a une expression très simple en un point situé en amont du précurseur :

$$L = L_w = \frac{1}{2} S_0 \rho_0 u_0^3 \qquad (7.12)$$

Outre cette substitution, qui est exacte, nous remplaçons, dans le terme :

$-S_1 u_c \rho_1 \left(\epsilon_{i1} + \epsilon_{e1} + \frac{1}{2} u_1^2\right)$, $\epsilon_{e1} + \epsilon_{i1} + \frac{1}{2} u_1^2$ par $\frac{1}{2} u_0^2$, où u_0 est la vitesse non perturbée en amont du précurseur. Cette approximation est du second ordre dans la mesure où l'erreur commise est faible si l'une ou l'autre (et a fortiori les deux) des conditions suivantes sont réalisées :

a) $u_c \ll u_1$

b) $\epsilon_{e1} + \epsilon_{i1} + \frac{1}{2} u_1^2 \approx \frac{1}{2} u_0^2$; $u_1 \approx u_0$

Cette approximation cesserait d'être justifiée si se trouvaient réunies les conditions d'un choc se déplaçant à une vitesse comparable à la vitesse d'éjection u_0 et d'un précurseur où le transfert d'énergie électrons ⟶ ions est important. Il s'avère que ce n'est jamais le cas. L'approximation faite nous permet de traiter de façon assez simple l'ensemble du choc et du précurseur, en calculant une valeur correcte au premier ordre de transfert électrons ⟶ ions dans le précurseur. L'équation (7.10) devient :

$$\frac{d}{dt} \int_{\vartheta} \rho \left(\epsilon_i + \epsilon_e + \frac{1}{2} u^2\right) = \mu \cdot \frac{1}{2} u_0^2 - S_2 u_2 \left(P_{e2} + P_{i2}\right) - S_2 \left(F_{e2} + F_{i2}\right) - \vartheta \rho_2^2 \Lambda(\epsilon_2) \qquad (7.13)$$

Etablissons maintenant le bilan de l'impulsion pour le volume $\mathcal{V}$. Plus précisément, comme il n'existe pas de quantité conservée du type "impulsion radiale" les équations qui suivent doivent être comprises comme le bilan d'impulsion d'un volume délimité par S_1, S_2 et un petit angle solide ω, qui devrait apparaître en facteur dans tous les termes, et n'est donc pas écrit. Le débit d'impulsion I_1 entrant dans $\mathcal{V}$ au travers de S_1 s'écrit, avec les notations déjà introduites plus haut :

$$I_1 = S_1 \mu u_1 \tag{7.14}$$

Faisons l'approximation que la pression du gaz est constante dans le volume $\mathcal{V}$, et vaut :

$$P_1 = \frac{2}{3} \rho_1 (\epsilon_{i1} + \epsilon_{e1}) \tag{7.15}$$

Le bilan du flux d'impulsion I_2 au travers de S_2 et des parois latérales du volume s'écrit :

$$I_2 = - S_1 P_1 \tag{7.16}$$

et non $-S_2 P_1$, comme on peut le vérifier en exprimant que la résultante des forces exercées par une pression constante sur une surface fermée est nulle.

Assimilons la vitesse du fluide dans $\mathcal{V}$ à une constante égale à u_2 et soit m_1 sa masse ; le bilan d'impulsion pour $\mathcal{V}$ s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(m_1 u_2) = S_1 (\mu u_1 - P_1) \tag{7.17}$$

Remarquons que nous n'avons tenu compte ni de la pression thermique du gaz dans le précurseur en amont du choc, ni de la différence entre la vitesse du fluide dans le vent stellaire en amont du précurseur et à l'amont du choc. Si le problème traité était en géométrie plane, nous aurions pu utiliser la conservation de l'impulsion dans le précurseur pour trouver le flux d'impulsion incident en S_1, indépendamment de la structure du précurseur. Mais, comme notre problème est en géométrie sphérique, cet argument ne s'applique pas. En fait, si le précurseur est "chaud" (c'est-à-dire si sa pression n'est pas négligeable par rapport à ρv^2), et qu'il est en régime stationnaire, la conservation de l'impulsion s'écrit :

$$\frac{d}{dr}\left[r^2 (p + \rho u^2)\right] = 2 r p \tag{7.18}$$

Avec les valeurs des paramètres du vent stellaire qu'on s'attend à rencontrer dans le cas des N.P., la correction au flux d'impulsion amont (7.14) calculée en intégrant (7.18) dans le précurseur est au pire de 15 % ; nous l'avons négligée.

Les développements qui précèdent peuvent sembler lourds, pour un résultat qui paraît "évident" sous sa forme finale. Mais ils ont permis d'établir un bilan énergétique qui :

a) permet un traitement avec un choc explicitement localisé, par opposition au traitement faisant appel à la viscosité artificielle, qui obligerait à traiter numériquement une zone de compression à forts gradients ;

b) est bien adapté à un traitement lagrangien du fait que la frontière aval du volume $\mathcal{V}$ est comouvante avec le fluide.

Soulignons enfin que, si le bilan global d'énergie (7.13) est indépendant de la structure détaillée du choc ionique, le bilan partiel électronique (7.9) repose sur l'hypothèse que le choc ionique est laminaire. S'il était turbulent, le transfert des ions aux électrons pourrait être plus important. Nous avons brièvement abordé ce problème dans la section 3. Dans la section 8, nous évaluerons les conséquences de l'hypothèse extrême : équipartition des températures ionique et électronique dans le choc.

4. Températures dans la région nébulaire

4.1. Température de la partie ionisée

Dans la région nébulaire, le rôle de la conduction thermique et les écarts de température entre électrons et protons sont négligeables. L'équation de l'énergie dans la partie ionisée de la région nébulaire peut être simplifiée considérablement si on ne s'attache pas à une précision maximum du traitement. Nous allons montrer rapidement pourquoi la température d'une région photoionisée est à peu près thermostatée à une valeur fixe. On trouvera un exposé plus détaillé dans l'ouvrage de SPITZER (1978). Convenons d'appeler énergie interne du gaz l'énergie cinétique d'agitation, à l'exclusion de l'énergie de liaison des électrons, ce qui permet d'ailleurs d'avoir une relation simple entre énergie interne et pression.

La source d'énergie interne est l'énergie cinétique des photoélectrons. Si on suppose l'équilibre d'ionisation (ce qui est une bonne approximation dès que la région ionisée a atteint son rayon de Strömgren), et qu'on fait l'approximation locale pour le bilan des photons de recombinaison (voir HUMMER et SEATON, 1962 ; et le paragraphe 2 de la section 3), le terme de chauffage

s'écrit :

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_I = \alpha_B n_e n_H \left(\langle h\nu_s \rangle - h\nu_c - \frac{3}{2} kT\right)$$

où $\langle h\nu_s \rangle$ est l'énergie moyenne des photons stellaires absorbés et ν_c le seuil de photoionisation. Par ailleurs, le principal processus de pertes est l'excitation collisionnelle suivie de désexcitation radiative de transitions de divers ions A_i

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_R = -\sum n_e n_{Ai} \mathcal{L}_i(T)$$

On voit alors que si les abondances ioniques restaient constantes, l'équilibre entre les termes de chauffage et de refroidissement conduirait à une température indépendante de la densité et de l'intensité du flux ionisant. La constante de temps de relaxation vers cet équilibre est très courte par rapport au temps d'évolution du système, de l'ordre de $10^4 n_H^{-1}$ ans : il s'agit d'un équilibre raide ; on peut donc remplacer l'équation différentielle de l'énergie par une équation algébrique de l'espèce la plus simple : T = const. La simplicité de ce résultat doit être tempérée par les correctifs suivants :
- le déplacement de l'équilibre d'ionisation des composants mineurs responsables du refroidissement modifie les abondances A_i . L'effet en est limité, car dans la majeure partie de la nébuleuse, le principal réfrigérant, l'oxygène, est dans les états OII ou OIII, qui conduisent à des températures d'équilibre peu différentes, de l'ordre de 9 000 K et 12 000 K respectivement.
- aux densités élevées (supérieures à 10^4 cm^{-3}) la désexcitation collisionnelle entre en compétition avec la désexcitation radiative.
- dans le front d'ionisation, l'équilibre entre ionisation et recombinaison n'est pas réalisé, et les ions réfrigérants n'ont pas atteint leur abondance d'équilibre, ce qui conduit à un maximum local de température (AXFORD 1961).

En dernier ressort, les observations fournissent la meilleure justification de l'adoption d'une température constante dans la partie ionisée de la région nébulaire. La température électronique est déduite, soit du rapport des intensités des raies "coronale" λ4363 et "nébulaire" λ4959+5007 de [OIII], soit d'une modélisation de l'ensemble des intensités des raies observées (FLOWER, 1969 ; BUERGER, 1973 ; KIRKPATRICK, 1972). Nous adoptons donc une équation d'état isotherme ϵ = 200 UMIS (T = 10^4 K) pour la partie ionisée de la région nébulaire.

4.2. Température de la partie neutre

Pour la partie neutre de la région nébulaire (tant qu'il en subsiste une), nous adoptons ϵ = 1 UMIS, soit une température T = 100 K. Contrairement au choix précédent de T = 10^4 K pour la partie ionisée, cette valeur est très incertaine, sans toutefois que cela porte à conséquence. Nous avons examiné le rôle joué par le chauffage par effet photoélectrique sur les grains (WATSON, 1972 ; DE JONG, 1977 ; DRAINE, 1978), pensant qu'à proximité du noyau la forte intensité du flux UV (912 < λ < 1 100) pourrait conduire à un chauffage important. Comme, en fait, cet effet n'est pas important, nous résumons sommairement le résultat auquel nous sommes arrivés. Si les grains ont une abondance et des propriétés "standard" : $Q_{abs}\, n_g\, \tau_g / n_H = 10^{-21}$ cm^2, et si la densité électronique provient uniquement des éléments dont le potentiel d'ionisation est inférieur à celui de l'hydrogène : $n_e = 5\ 10^{-4} n_H$, alors la puissance du chauffage photoélectrique, rapportée à un atome d'hydrogène : C_{pE}, dépend de l'intensité du flux UV : I_{uv} via une fonction "universelle" :

$$C_{pE} = n_H\, f\left(T, I_{UV}/n_H\right) \qquad (7.19)$$

Pour des valeurs croissantes de I_{uv}, la fonction f passe par un maximum puis décroît (car le potentiel des grains augmente). Donc, quelles que soient la densité du gaz n_H et l'intensité du flux UV, la température ne peut dépasser une valeur maximum déterminée par l'équilibre :

$$n_H\, \Lambda(T) = C_{pE} = n_H\, f_{max}(T)$$

Dans les conditions définies ci-dessus, et avec la fonction de refroidissement standard (voir section 4), la température maximum est environ 30 K. Par ailleurs, les valeurs typiques de n_H et I_{uv} dans la partie neutre d'une N.P. sont telles qu'on est effectivement au voisinage des conditions du maximum du chauffage photoélectrique.

On pourrait également penser que l'émission X de la cavité coronale soit capable de chauffer le gaz neutre de la région nébulaire (voir à ce sujet KRUGEL et TENORIO-TAGLE, 1978). Imposons, pour produire des effets dynamiques notables, la valeur de la fonction de refroidissement à $\Lambda = 2\ 10^{-26}$ erg.cm^3.s^{-1}, ou encore $\Lambda = 10^3 M_\odot^{-1}$ pc^{+5} Ma^{-3} (les dimensions ne sont pas les mêmes car c'est la densité de particules qui est prise en compte dans le premier cas, et la densité de masse dans le second), ce qui correspond à une température comprise entre 300 et 1 000 K, suivant le degré d'ionisation. Anticipons sur la suite en notant que dans les modèles que nous proposons, la densité du gaz

neutre est toujours supérieure à 10^3 Mo pc^{-3}. La puissance nécessaire pour chauffer 0.1 M⊙ au niveau fixé est :

$$P = \Lambda \rho M = 10^5 \, M_\odot \, pc^2 \, Ma^{-3}$$

La luminosité X de la partie coronale ne peut pas dépasser la luminosité mécanique du vent stellaire, qui, dans les modèles "réalistes" J et K (voir section 8), reste inférieure à $3\ 10^3$ M⊙ pc^2 Ma^{-3}. On conclut donc que la luminosité X et, du même coup, la dissipation dans les choc éventuels, sont incapables de produire un échauffement étendu et durable du gaz neutre de la région nébulaire.

En conclusion, on ne s'attend pas à trouver une fraction appréciable du gaz neutre à des températures notablement supérieures à 100 K. En ce qui concerne l'évolution dynamique de la partie lumineuse (ionisée) de la N.P., la température de la partie neutre n'intervient pas dès lors que la vitesse du son y est nettement inférieure aux autres vitesses du problème ; le gaz neutre est à "température nulle". Le choix de la valeur T = 100 K (C_s = 1 km/s), probablement trop élevée, évite d'avoir un trop grand saut de la densité dans le choc isotherme qui précède le front d'ionisation de type D.

5. Equation de l'ionisation

L'approximation locale citée plus haut permet de traiter séparément le transfert des photons Ly-c stellaires. On peut donc écrire les deux équations :

$$\frac{D}{Dt} x = (1-x) \langle a_\nu \rangle I - \alpha_B n_H x (1-x) \qquad (7.20)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 I = - n_H (1-x) I \langle a_\nu \rangle \qquad (7.21)$$

où I est le flux de photons Ly-c stellaires par unité de surface, $\langle a_\nu \rangle$ la valeur moyenne de la section efficace de photoionisation pondérée par le spectre des photons stellaires, et α_B le coefficient de recombinaison sur les niveaux $n \geq 2$. Nous avons adopté $\langle a_\nu \rangle = \frac{1}{2} a_{\nu_0} = 3\ 10^{-18}$ cm^2. Ces deux équations sont écrites pour un gaz d'hydrogène pur ; la présence d'hélium n'apporte pas de modification à (7.21) car les photons Ly-α de l'hélium sont capables d'ioniser l'hydrogène ; on néglige la correction (de l'ordre de 10 %) au dernier terme de (7.20) due à la présence des électrons issus de l'hélium.

6. Equations dynamiques dans la région nébulaire

Les deux premières sont tout à fait classiques :

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \, div \, u \tag{7.22}$$

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} \tag{7.23}$$

L'énergie interne spécifique est supposée varier linéairement avec le degré d'ionisation entre les deux limites discutées plus haut :

$$\epsilon = 1 + 200\, x \tag{7.24}$$

7. Traitement des fronts d'ionisation

Le problème de la structure des fronts d'ionisation et de la classification des types de fronts ainsi que des ondes simples (chocs et détentes) qui leur sont associées, est assez complexe, et il est hors de propos (et au-delà de notre compétence) de l'éclaircir entièrement ici. Résumons très brièvement le traitement "classsique" des fronts d'ionisation (SPITZER, 1978). Soit une densité amont n_1 et un flux incident de photons ionisants J, C_1 et C_2 les vitesses isothermes du son dans le gaz amont et aval. On ne peut satisfaire la conservation de la masse et de l'impulsion que pour :

$$J \geq J_{RC} \simeq 2 C_2 n_1 \quad \text{ou bien} \quad J \leq J_{DC} \simeq \frac{C_1^2}{2C_2} n_1$$

Aux valeurs limites, une seule transition est possible, qu'on appelle R-critique ou D-critique ; pour les autres valeurs permises du flux J, deux solutions existent, qu'on appelle R-fort et R-faible (resp. D-fort et D-faible). Quand J prend une valeur "interdite" entre J_D et J_R, il apparaît un choc précurseur qui élève la densité amont à une valeur suffisante pour permettre un front de type D. Quand on étudie la stabilité des fronts d'ionisation suivant la méthode utilisée pour les ondes de choc par LANDAU et LIFCHITZ (1971), on trouve que les fronts D-forts sont sous-déterminés, et les fronts R-forts surdéterminés par les conditions amont et aval. Les relations de conservation ne suffisent pas en général à déterminer la nature du front d'ionisation pour des conditions aux limites données. La figure 7.2 illustre ce point. Dans un diagramme p-v, les courbes 1 et 2 sont les isothermes du gaz neutre et ionisé ; les états A et B peuvent être joints soit directement par un front D-fort, soit par la succession d'une onde de raréfaction A-E, d'un écoulement

uniforme dans l'état E, d'un front D-critique E-F, et d'une onde de raréfaction F-B.

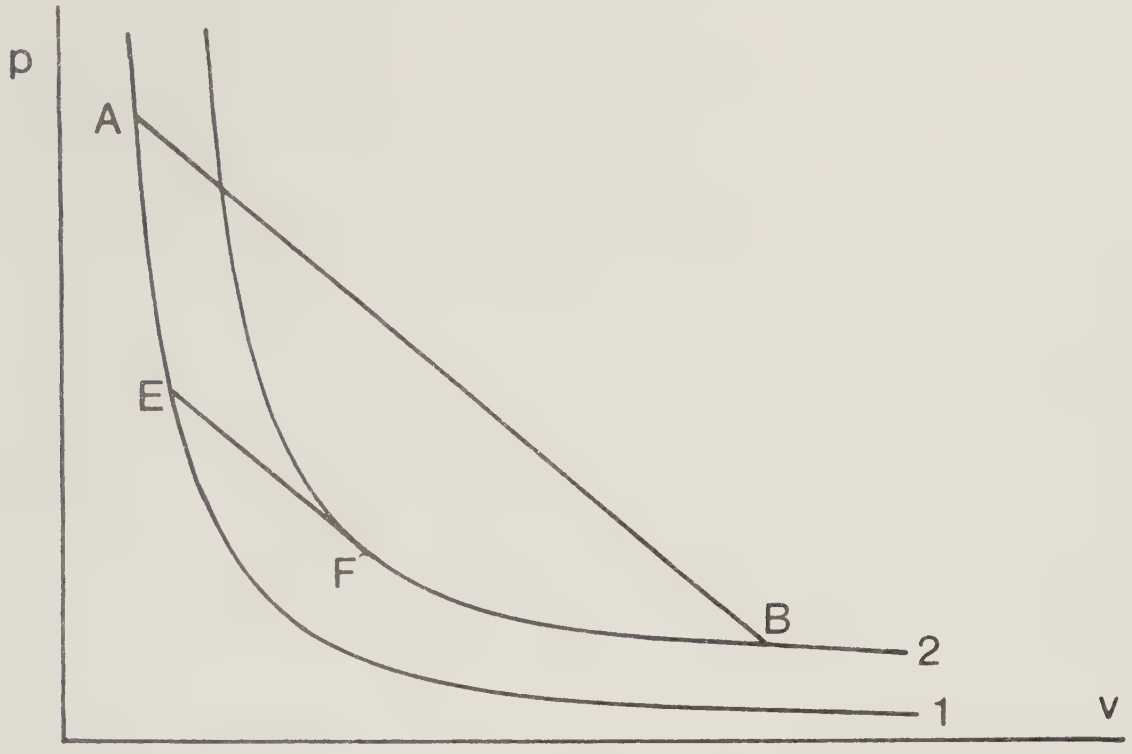


Figure 7.2 : Un exemple de front d'ionisation incomplètement déterminé par les conditions aux limites

MATHEWS (1965) et LASKER (1966), qui ont étudié l'évolution dynamique des régions HII, ne trouvent pas de fronts D-fort ou R-fort. TENORIO-TAGLE (1976) et et GIULIANI (1980) trouvent qu'un front D-fort peut exister dans un domaine assez restreint au voisinage des conditions d'existence d'un front D-critique. Nous avons étudié les configurations possibles quand on suppose, comme dans (7.19), que ϵ varie de façon monotone avec le degré d'ionisation. Nous trouvons que les fronts D-fort et R-fort ne peuvent apparaître, et que pour des conditions aux limites fixées par les pressions amont et aval, ainsi que par le flux ionisant incident sur le front, il y a toujours une solution unique comprenant un front D ou R, faible ou critique, précédé et/ou suivi par une combinaison de choc, écoulement uniforme, ou onde de raréfaction. Nous n'exposons pas la démonstration de ce résultat, qui serait hors de propos, et découle d'une hypothèse irréaliste, puisqu'on sait (AXFORD, 1961) que la température ne varie pas de manière monotone dans un front d'ionisation. En conclusion :

- l'adoption de l'équation d'état (7.24) n'est pas innocente ;

- elle élimine les fronts R-fort et D-fort ;
- elle lève arbitrairement l'ambiguïté entre les fronts forts et faibles en faveur des derniers ;
- ce choix est peut-être faux dans un domaine restreint de conditions ;
- dans les autres cas, une solution unique existe et les fronts d'ionisation sont correctement traités pour autant que les équations (7.20) à (7.23), sous forme numérique discrétisée, traitent correctement le transfert des photons Ly-c et la conservation de la masse et de l'impulsion.

8. Discrétisation spatiale

Nous n'allons pas décrire par le détail la discrétisation de toutes les équations décrites plus haut, et nous nous contenterons d'illustrer la procédure suivie par deux exemples : conservation de l'énergie au choc interne et conservation de l'impulsion dans la zone nébulaire. Auparavant, nous allons décrire le schéma de discrétisation spatiale des variables.

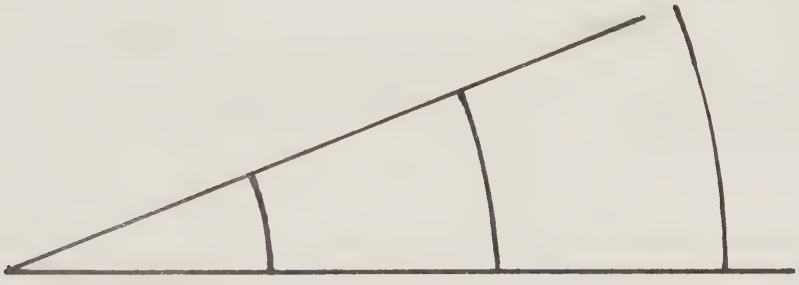
8.1. Discrétisation des variables

La nébuleuse est divisée en zones séparées par des frontières comouvantes avec le gaz : les interfaces. Chaque zone contient une masse constante, à l'exception de la première et de la dernière zone de la région coronale, délimitées respectivement par le choc interne et le front d'évaporation. Le nombre de zones de la région coronale est variable : les zones peuvent subir des fissions ou des fusions pour maintenir une résolution satisfaisante selon divers critères tels que rapport des températures dans deux zones adjacentes, etc... Le détail de cette procédure n'est pas intéressant ; précisons toutefois que les fusions et fissions conservent exactement (aux erreurs d'arrondi près) la masse et les énergies ionique et électronique, et que le saut de la valeur d'une variable entre deux zones adjacentes est au maximum de 30 % (température) ou 50 % (densité). Autant dire que nous n'avons pas poursuivi une illusoire précision numérique sans rapport avec les incertitudes fondamentales du modèle. Aucun rezonage n'est effectué sur la région nébulaire. La masse évaporée aux dépens de la région nébulaire ne lui est pas déduite ; elle est négligeable de ce point de vue. On néglige également l'épaisseur de la partie du front d'évaporation qui est traitée analytiquement ; le bien-fondé de cette approximation sera vérifié a posteriori dans la section 8.

Certaines grandeurs sont attachées au gaz contenu dans une zone : on les dira *centrées* sur les zones. Il s'agit de la masse m, de l'énergie interne ϵ, et du degré d'ionisation x. D'autres, comme la vitesse u, le rayon r, les flux conductifs F_i et F_e, le flux de photons ionisants F_u, sont centrées sur les interfaces. Dans la description qui suit, elles se verront attribuer des indices demi-entiers. Quelques grandeurs auxiliaires, telles que densité ρ, volume d'une zone $\mathcal{V}$, surface d'une interface S, sont également employées. Suivant la méthode employée par J.P. Chièze dans un code d'hydrodynamique stellaire, les équations sont écrites pour des zones sous-tendant un stéradian (problème sphérique), ce qui simplifie l'expression des facteurs géométriques et permet très facilement de traiter des zones de un radian (problème cylindrique) ou de surface d'unité (problème plan). De la sorte, pour une géométrie à n = 1, 2, 3 dimensions :

$$\left.\begin{aligned} S_{j+1/2} &= (r_{j+1/2})^{n-1} \\ \mathcal{V}_j &= \frac{1}{n}\left[(r_{j+1/2})^n - (r_{j-1/2})^n\right] \end{aligned}\right\} \quad (7.25)$$

La figure 7.3 illustre l'agencement de la discrétisation spatiale des variables du problème.



m_j $\quad$ $r_{j+1/2}$

e_j $\quad$ $u_{j+1/2}$

x_j $\quad$ $F^{uv}_{j+1/2}$

V_j $\quad$ $F^{ci}_{j+1/2}$

$\quad$ $\quad$ $F^{ce}_{j+1/2}$

$\quad$ $\quad$ $S_{j+1/2}$

Figure 7.3 Discrétisation spatiale des variables.

8.2. Premier exemple : équation de l'énergie ionique au choc interne

En soustrayant membre à membre les équations (7.13) et (7.9), on obtient l'équation de conservation de l'énergie interne + cinétique des ions, que nous écrivons avec la convention d'indices de la figure 7.3 :

$$\frac{d}{dt}\int_{v_1} \rho\left(\epsilon_i + \tfrac{1}{2}u^2\right) = \tfrac{1}{2}\mu u_0^2 - S_{3/2}\, u_{3/2}\left(p_{e\,3/2} + p_{i\,3/2}\right) - S_{3/2}\, F_{i\,3/2} - \mu\, \epsilon_{e1}\left(1 + \tfrac{2}{3}\,\mathrm{Log}\,\rho_1/\rho_0\right) - S_{1/2}\, F_P - m_1\left(\epsilon_{i1} - \epsilon_{e1}\right)/\tau_{ei1} \qquad (7.26)$$

Nous obtenons une expression aux différences finies en opérant les substitutions :

* $$\int_{v_1} \rho\left(\epsilon_{i1} + \tfrac{1}{2}u^2\right) = m_1\left(\epsilon_{i1} + \tfrac{1}{2}u_{3/2}^2\right)$$

* $$p_{e\,3/2} \longrightarrow p_{e1} = \tfrac{2}{3}\,\epsilon_{e1}\, m_1/v_1$$

et pareillement pour la pression ionique. Ce décentrement introduit une erreur $O(\Delta r)$, où Δr est le pas du maillage spatial, mais l'erreur n'est pas grande car le gradient de pression est faible dans l'écoulement subsonique derrière le choc.

* $$f_{i\,3/2} = F\left(\langle \epsilon_i \rangle, \mathrm{grad}\,\epsilon_i\right)$$

où F est la fonction définie par la formule (7.5), et où :

$$\langle \epsilon_i \rangle = \left(\epsilon_{i1}\cdot\epsilon_{i2}\right)^{1/2}$$

$$\mathrm{grad}\,\epsilon_i = \left(\epsilon_{i2} - \epsilon_{i1}\right)/\left(r_2 - r_1\right) = \left(\epsilon_{i2} - \epsilon_{i1}\right)/2\left(r_{s\,1/2} - r_{1/2}\right)$$

* F_P, le flux de conduction électronique dans le précurseur, est calculé suivant l'approximation (5.20). Nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}\left[m_1\left(\epsilon_{i1} + \tfrac{1}{2}u_{3/2}^2\right)\right] = \mu\left(\epsilon_{i1} + \tfrac{1}{2}u_{3/2}^2\right) + m_1\frac{d}{dt}\epsilon_{i1} + m_1 u_{3/2}\frac{d}{dt}u_{3/2}$$

$$= L_w - S_{3/2}\, u_{3/2}\,\tfrac{2}{3}\,\frac{m_1}{v_1}\left(\epsilon_{i1} + \epsilon_{e1}\right) - S_{3/2}\, F\left[\left(\epsilon_{i1}\cdot\epsilon_{i2}\right)^{1/2}, \left(\epsilon_{i2} - \epsilon_{i1}\right)/2\left(r_{s\,1/2} - r_{1/2}\right)\right] - S_{1/2}\, F_P\left(\epsilon_{e1}, \dot{m}_w, u_w, r_{1/2}\right) - m_1\left(\epsilon_{i1} - \epsilon_{e1}\right)/\tau_{ei} - \mu\,\epsilon_{e1}\left(1 + \tfrac{2}{3}\,\mathrm{Log}\,\frac{m_1\, r_{1/2}^2\, u_w}{v_1\,\dot{m}_w}\right) \qquad (7.27)$$

où L_w et $\dot{m}_w$ sont la luminosité mécanique et le taux de perte de masse par stéradian du vent stellaire, u_w sa vitesse d'éjection, et $r_{1/2}$ le rayon de la première interface (choc).

8.3. Second exemple : équation de la vitesse dans la région nébulaire

Nous pensons intéressant d'exposer la discrétisation de cette équation où on a prêté une attention particulière à la conservation de l'impulsion au voisinage d'une région à forts gradients (choc, front d'ionisation). L'équation de la vitesse s'écrit :

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} \qquad (7.28)$$

Soit sous forme discrétisée :

$$\frac{d}{dt} u_{i+1/2} = -\frac{1}{\langle\rho\rangle_{i+1/2}} \frac{P_{i+1} - P_i}{(\Delta r)_{i+1/2}} \qquad (7.29)$$

L'équation (7.29) est *formellement cohérente* avec (7.28) dans le sens où, quand le pas de maillage Δr tend vers zéro, le second membre de (7.29) tend vers celui de (7.28). Malheureusement, cette convergence à la limite des faibles Δr nous est de peu de secours. Dans un choc isotherme ou dans un front d'ionisation de type D, la densité peut varier d'un facteur 200. Si nous décidions qu'une précision satisfaisante est atteinte quand la densité varie d'au plus 10 % entre deux zones discrétisées, la transition devrait être décrite par une cinquantaine de zones. La méthode que nous avons adoptée est issue de la constatation suivante : les discontinuités qui se présentent dans la région nébulaire sont caractérisées par une équation d'état isotherme dans les fluides amont et aval. La conservation de l'énergie n'y joue donc aucun rôle. Par contre, nous savons que si la conservation des flux de masse et d'impulsion est vérifiée entre deux surfaces de contrôle placées de part et d'autre de la discontinuité, la propagation de cette dernière est correcte même si sa structure interne est décrite très grossièrement par les variables discrétisées. Parmi les nombreuses manières d'exprimer le produit

$$\langle\rho\rangle_{i+1/2} (\Delta r)_{i+1/2}$$

il en est une qui satisfait à la condition que nous venons d'énoncer. Choisissons :

$$\Delta r_{i+1/2} = r_{i+1} - r_i = \frac{1}{2}(r_{i+3/2} + r_{i+1/2}) - \frac{1}{2}(r_{i+1/2} + r_{i-1/2}) \qquad (7.30)$$
$$\langle \rho \rangle_{i+1/2} = \frac{m_{i+1/2}}{v_{i+1/2}} = \frac{1/2\,(m_i + m_{i+1})}{1/2\,(v_i + v_{i+1})}$$

Considérons maintenant l'ensemble des équations du type (7.29), pour les zones englobant une région de variation rapide de $\mathcal{P}$ et ρ, telle qu'il s'en trouvera dans la représentation discrétisée d'un front de choc ou d'ionisation, l'indice i variant de k à ℓ, et les zones extrêmes d'indice k et ℓ se trouvant de part et d'autre du front dans des régions d'écoulement régulier. Multiplions par $m_{i+1/2}$ (indépendant du temps) et sommons :

$$\frac{d}{dt} \sum_{k}^{\ell-1} m_{i+1/2}\, u_{i+1/2} = - \sum_{k}^{\ell-1} \frac{v_{i+1/2}}{\Delta r_{i+1/2}} (P_{i+1} - P_i) \qquad (7.31)$$

Comme, par hypothèse, nous traitons une région restreinte à forts gradients, nous supposons que son épaisseur est faible, et que nous pouvons faire l'approximation :

$$v_{i+1/2} / \Delta r_{i+1/2} \simeq S_M \simeq r_M^2$$

où S_M et r_M sont un rayon et une surface moyenne des zones concernées par la discontinuité. Nous trouvons alors :

$$\frac{d}{dt} \sum_{k}^{\ell-1} m_{i+1/2}\, u_{i+1/2} = - S_M (P_\ell - P_k) \qquad (7.32)$$

Nous pouvons interpréter la somme figurant au premier membre en imaginant des zones d'indice demi-entier, telles que la zone d'indice $i+1/2$ soit comprise entre les rayons r_i^* et r_{i+1}^* qui partagent par moitié les masses des zones ordinaires d'indices i et $i+1$ (voir figure 7.4, page suivante)

La somme au premier membre de (7.32) est une expression aux différences finies de l'impulsion de l'ensemble des zones demi-entières d'indices compris entre $k+1/2$ et $\ell-1/2$. Les rayons r_i et r_i^* ne coïncident en général pas. Mais, dans les zones k et ℓ, situées dans une région à faible gradient de densité, nous pouvons les confondre. Ainsi P_k et P_ℓ, qui sont les pressions en r_k et r_ℓ, sont effectivement les pressions qui s'exercent sur les faces extrêmes de l'ensemble des zones demi-entières figurant dans la sommation au premier mem-

bre, et (7.32) exprime que l'impulsion est conservée dans le front compris entre les zones k et ℓ .

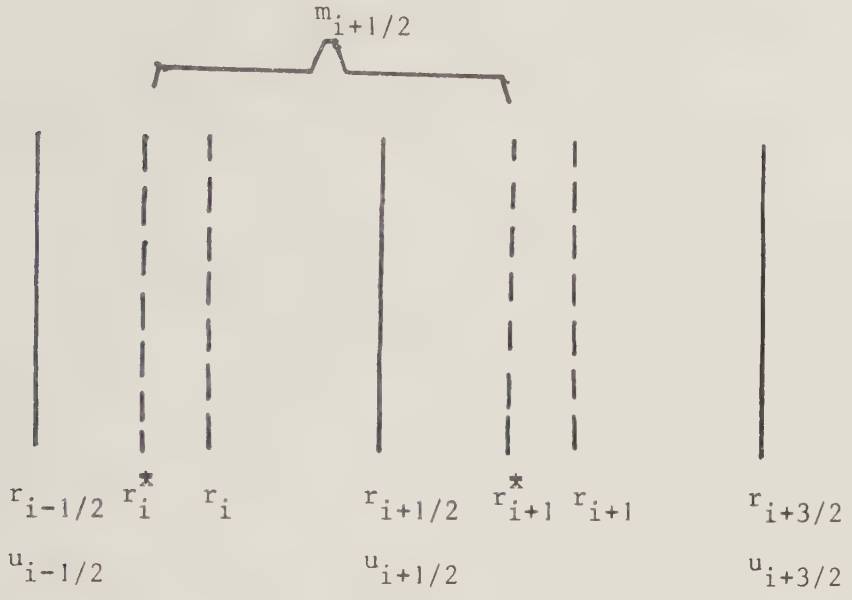


Figure 7.4 Disposition des zones demi entieres.

Résumons le résultat que nous avons établi. Soit un écoulement comprenant une région à forts gradients comprise entre des régions d'écoulement régulier, et soit une représentation discrétisée de cet écoulement. Il existe de multiples façons d'exprimer en fonction des variables discrétisées l'impulsion d'une tranche de l'écoulement. Les diverses expressions prennent des valeurs très voisines dans les régions de l'écoulement où les gradients sont faibles ; elles peuvent différer dans les régions à forts gradients, mais d'une quantité qui reste bornée puisqu'elle ne porte que sur les quelques zones où les gradients des variables sont importants. On peut donc les considérer comme équivalentes. De même, il existe de multiples manières d'exprimer en variables discrétisées l'équation de la vitesse (7.28). Nous aurions pu, par exemple, choisir d'exprimer $\langle \rho \rangle_{i+1/2} = (m_i/v_i + m_{i+1}/v_{i+1})/2$. Mais, sauf si le pas du maillage spatial tend vers zéro -ce qui peut présenter des difficultés pratiques si on veut effectivement réaliser un calcul- rien ne garantit en général que l'impulsion d'un système sans forces extérieures est correctement conservée. Nous avons montré que le choix des expressions

(7.30) conserve exactement une expression discrétisée de l'impulsion, même si les variables subissent d'importantes variations entre zones adjacentes.

8.4. Viscosité artificielle

Il existe deux manières de traiter numériquement les chocs : on peut soit les représenter par une discontinuité localisée en explicitant les relations de conservation -c'est ce que nous avons fait pour le choc interne de raccordement du vent stellaire-, soit les étaler pour rendre leur largeur du même ordre que le pas du maillage spatial, en augmentant artificiellement la viscosité (voir RICHTMYER et MORTON, 1967). La méthode de la viscosité artificielle consiste à ajouter à la pression du gaz, dans les équations aux différences finies, une pression Π qui ne soit importante que dans les régions de compression. Pourvu que la pression soit modifiée de manière cohérente dans l'équation de l'impulsion et dans l'équation de l'énergie, les lois de conservation ne sont pas altérées. Les calculs numériques publiés utilisent en général une pression visqueuse artificielle quadratique, dont l'expression, avec les notations de la figure 7.3, est :

$$\Pi_k = \beta \rho_k (u_{k-1/2} - u_{k+1/2}) \quad si \quad u_{k-1/2} > u_{k+1/2}$$
$$\Pi_k = 0 \quad si \quad u_{k-1/2} \leq u_{k+1/2} \qquad (7.33)$$

le coefficient β étant de l'ordre de l'unité. Cette forme de viscosité artificielle est en général utilisée dans des schémas *explicites* en temps. Or, comme nous l'exposerons au paragraphe 9, nous avons utilisé une méthode *implicite*. L'expérience a montré que la forme (7.33), utilisée dans un schéma implicite, a un comportement irrégulier lorsque le gradient de vitesse change de signe au cours d'un pas de temps. Nous avons corrigé ce défaut en lui ajoutant une pression visqueuse linéaire de la forme :

$$\Sigma_k = \alpha \rho_k \sqrt{\epsilon_k} (u_{k-1/2} - u_{k+1/2}) \qquad (7.34)$$

Nous avons trouvé que la combinaison de Π_k et Σ_k, avec les valeurs $\alpha = \beta = 0.3$, permettait d'absorber des chocs forts (Mach amont = 50), et ne perturbait pas notablement la pression (quelques %) dans les régions d'écoulement régulier. Dans les équations hydrodynamiques de la région coronale, où électrons et ions ont des énergies distinctes, le travail de la pression visqueuse a été inclus

dans l'équation de l'énergie des ions. En effet, les ions et les électrons ayant des libres parcours moyens comparables, la viscosité "naturelle" des ions domine largement celle des électrons ; nous avons préservé ce rapport en ce qui concerne la viscosité artificielle.

9. Discrétisation temporelle

Soit Z_c et Z_N les nombres de zones dans les régions coronale et nébulaire. Le problème dynamique comporte $2Z_c$ équations différentielles pour les énergies dans la région coronale, $Z_c + Z_N + 1$ équations différentielles pour les vitesses aux interfaces, et autant pour l'équation de continuité (qui se réduit à $dr_{i+1/2}/dt = u_{i+1/2}$. Convenons d'appeler équations dynamiques ces $4Z_c + 2Z_N + 2$ équations. On a également un système couplé d'équations différentielles, en espace pour le flux de photons Ly-c (7.16), et en temps pour la fraction ionisée (7.15), ainsi que la relation algébrique liant l'énergie interne au degré d'ionisation selon (7.19).

Portons notre attention sur le groupe des équations dynamiques. Une méthode de type explicite consisterait à avancer le système de l'instant t^n à l'instant $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ en évaluant les dérivées à partir des seconds membres calculés à l'instant t^n. En l'absence de conduction thermique, ce type de méthode n'est stable que si le pas de temps satisfait à la condition de Courant :

$$\Delta t < Inf\,(\Delta r_i / c_i) \qquad (7.35)$$

où Δr est la largeur d'une zone, et c la vitesse du son. Si la conduction est présente, le pas de temps d'une méthode explicite est de plus limité par :

$$\Delta t < Inf\,(\Delta r)^2 / K \qquad (7.36)$$

où la conductivité K est définie comme dans les sections 4, 5 et 5 par : $F_c = K\, d\epsilon/dr$. Au vu des valeurs obtenues dans nos modèles, cette dernière limite est de l'ordre de 1 jour !

Les méthodes de type implicite ne subissent pas de telles limitations du pas de temps. Le principe en est le suivant. Soit :

$$dy_i/dt = f_i(y_j)$$

le système d'équations à intégrer. Un schéma explicite consiste à avancer de t^n à t^{n+1} selon :

$$y_i^{n+1} - y_i^n = f_i(y_j^n) \cdot \Delta t \qquad (7.37)$$

Un schéma totalement implicite consiste à évaluer le second membre à l'instant t^{n+1} :

$$y_i^{n+1} - y_i^n = f_i(y_j^{n+1}) \cdot \Delta t \qquad (7.38)$$

Comme les expressions f_i sont des fonctions non linéaires des y_j , la solution de (7.38) nécessite plusieurs itérations à chaque pas de temps. On peut obtenir un système plus simple en se contentant d'effectuer un développement au premier ordre des f_i :

$$y_i^{n+1} - y_i^n = f_i(y_j^n) + \sum_j \left.\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right|_{t^n} (y_j^{n+1} - y_j^n) \qquad (7.39)$$

On a alors à résoudre un système linéaire d'ordre $4Z_c + 2Z_N + 2$. La matrice de ce système n'a d'éléments non nuls que dans une bande au voisinage de la diagonale, car les variables dynamiques ne sont couplées qu'à celles des zones voisines. En opérant "manuellement", pour la région coronale, la substitution

$$r_{i+1/2}^{n+1} - r_{i+1/2}^{n} = u_{i+1/2}^{n+1} \Delta t$$

dans les autres équations, nous avons pu réduire le nombre d'équations à : $3Z_c + 2Z_N + 2$, et la largeur de la bande diagonale à 7. Le nombre d'équations étant de l'ordre de 100, la propagation des erreurs d'arrondi nous a imposé d'effectuer la résolution du système en double précision.

L'expérience montre que le schéma implicite adopté n'impose pas de limitations de Δt autres que celles dictées par la vitesse d'évolution des variables. Le pas de temps est choisi de manière à ce que les variations relatives de ρ , ϵ , χ ne dépassent pas des bornes fixées, de l'ordre de 20 % (critère de TRURAN, 1975).

Section 8

RESULTATS ET DISCUSSION

1. Propriétés de la région coronale

Nous allons dans ce paragraphe, étudier les propriétés de la région coronale au travers de quatre modèles : B, C, D, E. Dans cette première partie de l'étude, nous n'abons pas tant visé au "réalisme" des résultats qu'à une étude systématique du rôle des divers processus physiques. Pour cela, partant d'un modèle de base, nous avons procédé à des expériences numériques, en activant ou désactivant, un à la fois, les trois principaux processus d'échange d'énergie : les pertes radiatives, la conduction, et l'équipartition dans le choc.

1.1. Structure du modèle de base (B)

L'évolution de ce modèle a été calculée en prenant en compte les divers processus physiques tels qu'ils ont été précédemment décrits : conduction thermique électronique et ionique, éventuellement limitée par la saturation ; pertes radiatives ; choc fort ionique sans transfert d'énergie aux électrons autre que le travail de compression. Les conditions initiales et aux limites adoptées pour ce modèle (et les trois suivant) sont résumées dans la Table 8.1. Au-delà de R_{ex}, la densité est nulle ; on a donc une interface libre. Cette condition aux limites est jusitifiée par le fait que la densité du milieu interstellaire est négligeable devant celle de la N.P. Le taux de perte de masse adopté, environ $2.5\ 10^{-8}$ M⊙ an $^{-1}$, bien qu'étant un ordre de grandeur plus faible que ceux envisagés dans les modèles publiés de N.P., est probablement encore trop fort. Ce n'est pas un inconvénient réel, vu le but poursuivi dans cette première partie de l'étude. Les mêmes remarques s'appliquent au flux de photons ionisants, qui est celui d'une étoile ayant une luminosité de 10^4 L⊙ et une température effective de 10^5K, valeurs "classiques" mais sujettes à révision depuis peu.

L'évolution des profils de densité et de vitesse est représentée sur la Fig. 1. La partie de l'écoulement comprise entre l'étoile et le choc interne ($0 < r < R_c$) n'est pas représentée ; elle est décrite simplement par :

$$u = \text{const.} = u_w \quad , \quad \rho(r) = \dot{m}/ur^2,$$

où on rappelle que $\dot{m}$ est le flux de masse par stéradian.

Décrivons rapidement l'état du système à l'époque t = 600 ans, repré-

sentée par le second tracé (trait plein) des Fig. 1a et 1b. On pourra se référer, pour la nomenclature, à la Fig. 1 de la Section 3. La région coronale s'étend du choc interne à $R_c = 2\ 10^{-3}$ pc jusqu'au front d'évaporation à $R_f = 9.3\ 10^{-3}$ pc. L'écoulement derrière R_c est subsonique, le fluide est comprimé, et la vitesse décroît vers l'extérieur. Nous reviendrons plus en détail sur la structure de la région coronale. Au rayon R_f, la densité varie de façon apparemment discontinue. Cette discontinuité reflète la technique utilisée pour traiter analytiquement la partie de la transition entre les régions coronale et nébulaire où les gradients sont les plus forts et les échelles de temps suffisamment faibles. A l'instant considéré, l'épaisseur (qu'on a négligée) de la transition traitée analytiquement est de $1.5\ 10^{-4}$ pc, soit moins de $2\ 10^{-2}\ R_f$. L'approximation annoncée à la fin de la Section 6 est donc validée dans ce cas (et en fait dans l'ensemble des modèles calculés). La masse du gaz compris dans la région coronale est de $5\ 10^{-5}$ M⊙.

TABLE 8.1 - Caractéristiques communes aux modèles B, C, D, E

Région nébulaire		
densité initiale	$\rho = 6.8\ 10^{3}$ M⊙ pc^{-3}	($n = 2\ 10^{5}$ cm^{-3})
vitesse initiale	$u = 0$	
rayon interne	$R_f = 10^{-2}$ pc	
rayon externe	$Rex = 2\ 10^{-2}$ pc	
masse	$M = 0.2$ M⊙	
Etoile centrale		
vitesse du vent	$u_w = 10^{3}$ pc Ma^{-1}	($u = 10^{3}$ Km s^{-1})
flux de masse	$\dot{m} = 2\ 10^{-3}$ M⊙ Ma^{-1} srd^{-1}	($\dot{M} = 2.5\ 10^{-8}$ M⊙ an^{-1})
flux de photons	$N_{LYC} = 6.8\ 10^{47}$ ph s^{-1}	

Entre R_f et $R_b = 1.74\ 10^{-2}$ pc se trouve la partie ionisée de la région nébulaire dont la masse à l'instant considéré est de $5\ 10^{-2}$ M⊙. En R_b se situe un front d'ionisation, dont on peut reconnaître la nature (D faible) par le fait que l'équilibre de pression y est approximativement réalisé, et que le saut de vitesse (4 Km s^{-1}) est inférieur à la vitesse du son dans le gaz ionisé. Au rayon R_s, quasiment confondu avec R_b, se situe le choc fort isotherme précurseur du front D. Entre R_b et R_s se trouve une couche de gaz neu-

tre de densité élevée ($5\ 10^{5}$ M⊙ pc^{-3}) dont l'épaisseur ($3\ 10^{-5}$ pc) ne peut apparaître sur la Fig. 1. Sa masse est de $6\ 10^{-2}$ M⊙, et sa vitesse d'expansion 7 km s^{-1}. Au-delà de R_b se trouve du gaz quasiment dans l'état initial, à celà près qu'une onde de raréfaction se propage vers l'interieur depuis la frontière externe à pression nulle, et provoque une expansion à des vitesses inférieures au km s^{-1}.

Passons rapidement en revue l'évolution de la nébuleuse. A l'instant initial, le flux de photons incident à la frontière interne de la nébuleuse est suffisament important pour autoriser la propagation d'un front de type R. Au bout d'une centaine d'années, la plus grande partie du flux ionisant est employée à compenser les recombinaisons, et le front devient de type D tandis qu'un choc précurseur s'en détache. La pression du gaz ionisé est initialement supérieure à la pression dynamique du vent stellaire (et c'est en cela que notre modèle se distingue des modèles de Mathews ou de Kwok et al., discutés dans la Section 3), et l'interface R_f recule vers le centre de la nébuleuse. Mais le vent stellaire injecte de l'énergie dans la cavité coronale, dont la pression croît, et à t = 300 ans, l'interface R_f rebrousse chemin, et repasse par sa position initiale (10^{-2} pc) à t = 700 ans. Cette phase transitoire qui représente moins du dixième du temps d'évolution, mais environ le tiers du volume de calcul, ne doit pas être interprétée comme représentant effectivement les phases initiales de l'évolution d'une N.P., mais comme une ralaxation vers un régime établi, rendue nécessaire par le caractère trop schématique des conditions initiales de la région coronale. Nous aurions pu l'éviter en "préparant" soigneusement le système, mais on aurait pu soupçonner que l'évolution ultérieure résultait essentiellement des conditions initiales.

A t = 1 000 ans, le choc isotherme atteint la frontière externe de la nébuleuse. A partir de cet instant, la couche de gaz comprimé qui était comprise entre R_b et R_s voit sa masse diminuer du fait de la progression du front d'ionisation, et elle est accélérée. A environ t = 2 500 ans, le front d'ionisation atteint le bord externe de la nébuleuse, dont s'échappe un flux non nul de photons Ly-c. Le gaz ionisé, qui subissait un confinement inertiel de la part de la couche de gaz neutre, est maintenant en expansion libre dans le vide, à des vitesses de plusieurs dizaines de km s^{-1}. L'évolution des rayons R_c, R_f, et R_b en fonction du temps est représentée sur la figure 2a. On remarque que dès lors que le choc a atteint la frontière de la région nébulaire, l'expansion s'accélère.

Examinons maintenant de plus près la structure de la région coronale. La Fig. 3a donne les profils de densité, d'énergie interne ionique et électronique, et des flux conductifs ionique et électronique, en variables réduites (voir légende) à l'époque t = 3 000 ans. Dans la moitié interne de la région coronale, l'énergie interne des ions l'emporte largement sur celle des électrons. De même le flux conductif *ionique* (qui est saturé) l'emporte sur le flux conductif électronique ; toutefois le flux total d'énergie est, jusqu'à $X^* = 0.3$, dominé par le flux d'enthalpie $\mu (\rho\epsilon + p)$ associé à l'écoulement du gaz. Quand on progresse vers l'extérieur, la relaxation transfère de l'énergie interne des ions aux électrons qui l'évacuent vers l'extérieur par conduction. A partir du milieu de la région coronale, l'équipartition ion-électron est réalisée, et le mécanisme dominant le transport d'énergie est la conduction électronique non saturée. Remarquons qu'il était peu évident a priori que la conduction ionique puisse dominer, au moins par endroits, la conduction électronique. Le caractère non autosimilaire du modèle numérique se reflète dans la structure de la région coronale, qui, représentée en variables sans dimensions, évolue à mesure que l'expansion se poursuit et s'accélère. La densité diminuant, le couplage ion-électron devient moins efficace. La comparaison des Fig. 3a et 3b illustre l'évolution de la structure de la région coronale .

Le bilan de masse fait ressortir qu'à t = 3 000 ans, la masse évaporée représente 53 % de la masse de la région coronale. Elle n'est donc pas largement dominante comme le supposent Weaver et al.

La Fig. 4a donne l'évolution du bilan d'énergie de la région coronale. On constate que, à t = 6 000 ans, la moitié de l'énergie fournie a été rayonnée (essentiellement dans le front de conduction), le reste se partageant entre l'énergie interne de la région coronale (15 %) et le travail mécanique fourni à la région nébulaire via l'interface R_f (35 %). Le défaut de fermeture du bilan d'énergie est de 4 %, ce qui donne une idée de la précision numérique, adéquate mais non luxueuse. Il n'est pas possible, en toute rigueur, d'attribuer une énergie interne à la partie du gaz coronal qui provient de l'évaporation (à cause des échanges conductifs), mais si on assigne à la masse évaporée (53 %) la moitié de l'énergie interne de la région coronale, soit 0.44 $M_\odot\ pc^2\ Ma^{-2}$, on voit que son transfert de la région nébulaire à la région coronale a donné lieu au rayonnement d'une énergie : 3.2 $M_\odot\ pc^2\ Ma^{-2}$, soit environ sept fois plus. Nous voyons donc ici aussi que le calcul numérique nous a permis de trai-

le problème dans un cas où les conditions de validité du modèle de Weaver et al. ne sont pas remplies. Nous reviendrons plus loin, au paragraphe 2.1, sur la discussion de la fraction d'énergie rayonnée dans le front d'évaporation.

1.2. Modèle C (non radiatif)

Ce modèle diffère du modèle précédent uniquement par le fait qu'on y a "débranché" les pertes radiatives. La Fig. 5 met en regard les profils de densité du modèle B (reproduit de la Fig. 1b pour faciliter la comparaison) et du modèle C. Comme on pouvait s'y attendre, dans le cas où les pertes radiatives sont supprimées, l'expansion est plus rapide ; la différence est surtout sensible ence qui concerne le bord interne de la nébuleuse (interface R_f). La structure de la région coronale ne diffère pas sensiblement de celle du modèle B ; nous ne l'avons pas représentée. La Fig. 2b montre les diagrammes de marche de R_c, R_f et R_b en fonction du temps. On a fait figurer sur le même diagramme deux droites, qui sont à rapprocher de la trajectoire de R_f, rayon de la cavité coronale. La première est la solution analytique donnée par Weaver et al., dans le cas d'un vent stellaire de puissance constante au sein d'un milieu indéfini de densité uniforme.

$$R_f = \left(\frac{1000}{308}\right)^{1/5} \ell_w^{1/5} \rho_0^{-1/5} t^{3/5} \qquad (8.1)$$

où ℓ_w est la luminosité mécanique par stéradian et ρ_0 la densité externe. La trajectoire de R_f se situe au-dessus de cette première droite, car notre modèle numérique a un rayon initial non nul. D'autre part, l'épaisseur de la partie ionisée de la région nébulaire n'est pas négligeable. Enfin, à t = 1 000 ans, le choc externe situé en R_b atteint le bord de la nébuleuse. Peu après, dès que l'onde de raréfaction (réflexion du choc sur l'interface libre externe) est remontée jusqu'à R_f, la cavité coronale "sait" que le milieu externe n'est pas indéfini, et son expansion s'accélère. On peut dans ce cas trouver une approximation analytique simple à son évolution, sous les hypothèses que la vitesse d'expansion est faible par rapport à la vitesse du son dans la cavité, et que la masse de la nébuleuse que pousse la cavité coronale (soit m_s par stéradian) est concentée en une mince couche. On est à nouveau en présence d'un problème autosimilaire, et par des arguments dimensionnels, on trouve que l'énergie interne par stéradian de la cavité, et son rayon, sont de la forme :

$$e = \lambda \ell_w t \tag{8.2}$$

$$R = \mu (\ell_w / m_s)^{1/2} t^{3/2} \tag{8.3}$$

On détermine les valeurs de λ et μ en exprimant la conservation de l'énergie pour la cavité et l'impulsion pour la coquille de gaz nébulaire :

$$\frac{de}{dt} = \ell_w - p R^2 \frac{dR}{dt} \tag{8.4}$$

$$p = \frac{2}{3}\frac{e}{v} = 2eR^{-3} \tag{8.5}$$

$$m_s \frac{d^2R}{dt^2} = p R^2 \tag{8.6}$$

Il vient :

$$\lambda = 1/4$$
$$\mu = (2/3)^{1/2}$$

On note que l'expansion de R_f suit assez bien la loi (8.3) ; l'expansion est un peu plus rapide du fait qu'il occupe une couche d'épaisseur non négligeable, et que (8.6) n'est pas strictement valable. On peut également vérifier d'après la Fig. 4b, qu'à l'époque t = 6 000 ans, un quart de l'énergie fournie par le vent stellaire est sous forme d'énergie interne, conformément à la valeur trouvée pour λ .

1.3. Modèle D (adiabatique)

On a calculé l'évolution de ce modèle en supprimant les pertes radiatives et la conduction. La Fig. 6 décrit la structure de la région coronale à l'époque t = 8 000 ans. Les oscillations disgracieuses des grandeurs au voisinage de la frontière externe ne résultent pas d'une instabilité numérique, mais du fait que, l'évolution du gaz étant aidiabatique, il a gardé la mémoire des conditions initiales, qui n'étaient pas, faute de connaître d'avance le résultat du calcul, en harmonie avec l'évolution ultérieure. Cela dit, on note que, du fait que le rayon du choc interne R_c a crû avec le temps, les couches successives de gaz adjointes à la cavité coronale l'ont été sur des adiabats de plus en plus élevés ; donc dans l'état présent (isobare) la température croît et la densité décroît vers l'extérieur. Mis à part la struc-

ture de la région coronale, l'évolution du modèle D est exactement identique à celle du modèle C, et la Fig. 2b vaut également pour le modèle D. Cela s'explique aisément si on note que l'énergie cinétique est négligeable devant l'énergie interne de la région coronale, qui est, à une excellente approximation, isobare. Dans ces conditions, la pression à l'interface R_f est simplement $2e/3\mathcal{V}$, où e est l'énergie interne et $\mathcal{V}$ le volume de la région coronale, et les équations (8.4)-(8.6) sont valables indépendamment du détail de sa structure interne.

1.4. Modèle E (relaxation forcée)

Pour ce modèle, on a adopté l'hypothèse faite par Weaver et al., que les électrons et les ions émergent du choc avec des températures égales. Pratiquement, on a multiplié par 1 000 le taux de relaxation ion-électron dans la première zone de la région coronale. La Fig. 3c montre la structure de la région coronale pour le modèle E à l'époque t = 3 000 ans. Le transport d'énergie y est assuré principalement par la conduction électronique. Cette différence mise à part, l'évolution dynamique et le bilan d'énergie du modèle E sont identiques à ceux du modèle B, ce qui se comprend partiellement en remarquant la similitude des profils de densité et de température des Fig. 3a et 3c dans la partie $X^* > 0.5$. Contrairement à l'identité des propriétés dynamiques des modèles C et D, celle des modèles B et E n'est en fait qu'approximative. Sans rentrer dans les détails, disons seulement que l'approximation est d'autant meilleure que le volume de la région où l'équipartition n'est pas réalisée (dans le cas du modèle B) est négligeable par rapport au volume total, ce qui est intuitivement assez clair.

2. Vers un modèle réaliste

2.1. Première approche : modèle J

Les conditions initiales et aux limites utilisées pour le modèle J sont résumées dans la Table 3 ci-après. Le choix de ces paramètres répond à une approche "naïve". On a supposé que l'éjection par la géante rouge de son enveloppe se faisait à vitesse et taux de perte de masse constants, d'où la loi en r^{-2} pour la densité nébulaire initiale. Il semble que la vitesse d'éjection du vent stellaire augmente à mesure que le rayon de l'étoile décroît. Par ailleurs, le taux de perte de masse ayant fortement décru depuis une valeur de

TABLE 8.2

Région nébulaire			
densité initiale	$\rho = 8\ 10^{3}\ (r/R_f)^{-2}$ M⊙ pc^{-3}		
vitesse initiale	$u = 10$ pc.Ma^{-1}		
rayon interne	$R_f = 10^{-2}$ pc		
rayon externe	$R_{ex} = 3\ 10^{-2}$ pc		
masse totale	M = 0.2 M⊙		
Etoile centrale			
temps (10^3 ans)	0	3	6
N_{LYC} (ph.s^{-1})	$2.2\ 10^{46}$	$4.5\ 10^{46}$	$1.1\ 10^{47}$
$\dot{M}$ (M⊙.an^{-1})	$2.5\ 10^{-9}$	$1.2\ 10^{-9}$	$1.2\ 10^{-9}$
u_w (km.s^{-1})	10^3	$2\ 10^3$	$3\ 10^3$

l'ordre de 10^{-3} M⊙ an^{-1} lors de l'éjection de l'enveloppe jusqu'à environ 10^{-9} M⊙ an^{-1} pendant la phase "active" de la nébuleuse, on a adopté un taux de perte de masse décroissant. Enfin, en accord avec le schéma évolutif de HARMAN et SEATON, nous avons supposé que la température effective augmentait à luminosité bolométrique constante, et donc que le flux de photons ionisants était croissant. Les flux adoptés sont ceux d'une étoile de 10^3 L⊙, dont la température effective croît de $2.5\ 10^4$ à 10^5 K. La Fig. 7 montre l'évolution dynamique du modèle J, et la Fig. 8 son bilan énergétique. On peut remarquer que, bien que les paramètres adoptés pour décrire l'étoile excitatrice soient nettement différents de ceux du modèle B (en particulier une luminosité mécanique en moyenne quatre fois plus faible), la fraction de l'énergie consacrée aux pertes radiatives est restée quasiment inchangée.

On peut donner de ce fait une explication simple. Admettons que la partie de la région coronale appelée "front d'évaporation", telle qu'elle est définie dans la Section 6, possède en outre la propriété de renfermer l'essentiel des pertes radiatives. La Fig. 6.3 montre que c'est le cas dès que la température frontière choisie est suffisamment élevée ($T_{eo} > 3\ 10^5$ K, $\epsilon_{eo} > 3\ 10^3$ pc^2 Ma^{-2}) Pour alléger le calcul, sans rien sacrifier d'essentiel, nous remplaçons l'équation (6.27) par une autre plus simple, mettant aussi bien en évidence un

flux conductif critique :

$$\mu = \frac{3}{5\epsilon_0}\left(G - \rho_0 \epsilon_0 \Gamma(\epsilon_0)\right) \tag{8.7}$$

où μ est le flux de masse, G le flux conductif, $\epsilon_0 = 2\epsilon_{e0}$ et la quantité Γ, homogène à une vitesse, se déduit de la fonction K définie dans la Section 6 :

$$\Gamma(\epsilon_0) = \sqrt{\kappa_0 K(\epsilon_0/2)/2} \tag{8.8}$$

On peut alors écrire l'équation suivante pour l'énergie interne E de la région coronale :

$$L_w = \frac{dE}{dt} + 2E\frac{d\mathrm{Log}R}{dt} + \frac{3E}{R}\Gamma(\epsilon_0) \tag{8.9}$$

On peut former deux quotients intéressants entre les trois termes du second membre :

a) Le rapport du premier (énergie interne stockée) au second (travail à la frontière) se met sous la forme :

$$\frac{d\mathrm{Log}E}{2\,d\mathrm{Log}R} = \frac{d\mathrm{Log}E}{d\mathrm{Log}t} \Big/ 2\,\frac{d\mathrm{Log}R}{d\mathrm{Log}t} \tag{8.10}$$

qui dépend de la forme de la *loi d'expansion*, et peut être calculée facilement dans les cas autosimilaires où $R \propto t^{\alpha}$

b) Le rapport du second terme au troisième (pertes radiatives) s'écrit :

$$\frac{2}{3\Gamma}\frac{dR}{dt} \tag{8.11}$$

Contrairement au précédent, ce rapport dépend directement de la *vitesse d'expansion*, et indique que les pertes radiatives sont comparables au travail utile quand la vitesse d'expansion est de l'ordre de $3\Gamma/2 \simeq 10\ km.s^{-1}$. Comme les vitesses d'expansion (il s'agit du bord interne de la nébuleuse) des N.P. sont justement de cet ordre, on en déduit que les pertes radiatives absorbent généralement une part notable de la luminosité mécanique L_w du vent stellaire.

Revenons à l'évolution dynamique. La forme du profil de densité est satisfaisante ; en particulier, le rapport R_f/R_b du rayon interne au rayon ex-

terne de la partie ionisée de la nébuleuse, est de l'ordre de 1/2, en accord avec les observations. L'évolution de la masse ionisée en fonction du rayon est comparée sur la Fig. 9 à l'ensemble des valeurs observées pour un échantillon de N.P. L'accord est encore satisfaisant. La structure cinématique, par contre, est moins satisfaisante. La "vitesse d'expansion" (en fait, la vitesse radiale du gaz ionisé) reste, jusqu'à t = 3 000 ans, de l'ordre de 10 km s^{-1}, ce qui est un peu faible. D'autre part, toujours jusqu'à t = 3 000 ans, il n'apparaît pas de gradient de vitesse radiale, alors que, comme l'ont montré les observations de Wilson, de tels gradients sont presque toujours présents dans les N.P. Bien sûr, à t = 4 000 ans, la densité surfacique de la couche neutre, entamée par le front d'ionsation, a fortement décrû, et elle est accélérée, ce qui fait apparaître un gradient de vitesse dans le gaz ionisé. Mais, en fait, cette situation ne diffère pas fondamentalement de celle qui lui fait bientôt suite : absence totale de gaz neutre, et expansion du gaz ionisé dans le vide. C'est ce genre de situation qui est invoquée par Mathews, ou par Ferch et Salpeter pour expliquer la structure cinématique des N.P. Mais ce genre d'explication ne tient pas dès lors qu'on admet, suivant les résultats de POTTASCH et al. (1978), que la plupart des N.P. observées sont optiquement épaisses dans le continu de Lyman (en gros, toutes celles de rayon inférieur à 0.2 pc, comme l'indique la Fig. 9a). Un modèle cohérent doit donc présenter un gradient de vitesse radiale qui ne soit pas dû à l'expansion libre du gaz ionisé. Avant de présenter un tel modèle, passons dans les coulisses pour montrer comment il est construit.

2.2. Retour au papier-crayon

Dans ce paragraphe, nous montrons comment des calculs simples permettent de construire un modèle de N.P. ayant des propriétés arbitraires. La méthode n'est qu'approximative, mais constitue une bonne base de départ avant un calcul numérique complet. Elle permet de prévoir le comportement du modèle dans la phase où le front d'ionisation n'a pas encore attein le bord de la nébuleuse.

Admettons pour simplifier que R_f/R_b soit constant et posons :

$$k = \frac{1}{3}\left[1 - (R_f/R_b)^3\right] \qquad (8.12)$$

La dynamique du gaz ionisé est schématisée à l'exrême : on admet que la den-

R_f : rayon interne de la nébuleuse
R_b : front d'ionisation D-faible
R_s : choc isotherme

u_1 : vitesse du gaz neutre en avant du choc
u_c : vitesse du gaz dans la couche comprimée
u_2 : vitesse du gaz ionisé derrière le front

sité est uniforme entre R_f et R_b ; c'est une approximation qui ne serait bonne que si la vitesse d'expansion était faible par rapport à 10 km s^{-1}. Admettons pour la densité et le rayon de la région ionisée des lois simples (quoique le principe de la méthode n'en dépende pas essentiellement) :

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \rho_0 (t/t_0)^{-\alpha} \\ R_S \simeq R_b &= R_0 (t/t_0)^{\beta} \end{aligned}\right\} \qquad (8.13)$$

Soit m la masse de gaz ionisé, m_c la masse de gaz comprimé entre R_b et R_s, μ_1 le flux de masse au travers du choc R_s et μ_2 celui au travers du front d'ionisation, toutes ces quantités étant comptées par stéradian. On a, avec une très bonne approximation :

$$u_c \simeq \frac{dR_b}{dt} \simeq \frac{dR_s}{dt} = \beta \frac{R_0}{t_0} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\beta-1}$$

En exprimant la conservation de la masse, on obtient :

$$u_2 - u_c = -k(3\beta-\alpha)\frac{R_0}{t_0}(t/t_0)^{\beta-1}$$
$$= -k\frac{(3\beta-\alpha)}{\beta}u_c \qquad (8.14)$$

En faisant le bilan d'impulsion de la coquille de gaz neutre comprimé :

$$m_c \frac{d}{dt}u_c = \mu_1(u_1-u_c) - \mu_2(u_2-u_c) + R_s^2 \rho c^2 \qquad (8.15)$$

où $c = (p/\rho)^{1/2}$ est la vitesse isotherme du son dans la région ionisée, et où :

$$\mu_1 = R_s^2 \rho_1 (u_c - u_1) \qquad (8.16)$$

$$\frac{dm_c}{dt} = \mu_1 - \mu_2 \qquad (8.17)$$

On voit alors que si on se donne les lois de variation de la taille et de la densité de la région ionisée, l'équation (8.14) fixe le saut de vitesse au front d'ionisation. Si on se donne de plus la loi de vitesse du gaz neutre circumnébulaire $u_1(R_s(t))$, on peut calculer la masse de la coquille $m_c(t)$ et la densité $\rho_1(R_s(t))$ du gaz situé devant le choc. Par exemple, si on suppose que u_1 suit une loi semblable à u_c :

$$u_1 = \lambda R_0 t_0^{-\beta} t^{\beta-1} \quad , \quad \lambda < \beta$$

et qu'on pose :

$$x = m_c / \rho_0 R_0^3 \quad , \tau = t/t_0 \quad , \gamma = ct/R_0$$

on trouve :

$$x = \frac{k(3\beta-\alpha)[\lambda-\beta+k(3\beta-\alpha)]}{(3\beta-\alpha)(\beta-\lambda)+(\beta-1)[\beta-k(3\beta-\alpha)]}\tau^{3\beta-\alpha}$$
$$+ \frac{\gamma^2}{(\beta-\alpha+2)(\beta-\lambda)+(\beta-1)[\beta-k(3\beta-\alpha)]}\tau^{\beta-\alpha+2}$$
$$+ D\,\tau^{-(\beta-1)[\beta-k(3\beta-\alpha)]/(\beta-\lambda)} \qquad (8.18)$$

Cette expression est trop lourde pour être maniable, et nous allons perdre en généralité pour gagner un peu de simplicité. Nous allons supposer que les vi-

tesses v_1, v_2, v_c sont constantes, c'est-à-dire que $\beta = 1$. Conformément à la relation empirique de MACIEL et POTTASCH (1980), nous supposons que la masse ionisée augmente linéairement avec le rayon de la N.P., donc que $\alpha = 2$. L'équation (8.15) nous permet alors de trouver la densité ρ_1 du gaz circumnébulaire :

$$\rho_1 = \frac{k u_c (u_c - u_2) + c^2}{(u_c - u_1)^2} \rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \qquad (8.19)$$

et la masse de la coquille de gaz comprimé entre R_b et R_s :

$$m_c = m_{c0} + \frac{k u_c (u_1 - u_2) + c^2}{(u_c - u_1)} \rho_0 R_0^2 t \qquad (8.20)$$

Affectons les valeurs numériques :

$R_f/R_b = 1/2 \longrightarrow k = 7/24$ suivant 8.12

$u_c = 25$ km s^{-1} $\longrightarrow u_c - u_2 = 7.3$ km s^{-1} suivant 8.14

On vérifie que le saut de vitesse $u_c - u_2$ est compatible avec l'existence d'un front D. On a un gradient de vitesse radiale entre $u_f = 12.5$ km s^{-1} et $u_2 = 17.7$ km s^{-1}. Pour le choix de la valeur de u_1, nous nous imposons que $m_c(t)$ (8.20) soit croissante, considérant comme artificielle une solution où une masse m_{co} serait présente à l'instant $t = 0$.

m_c croissante $\longrightarrow$ $u_1 \geq u_2 - c^2/k u_c = 6.8$ km s^{-1}

Nous choisissons :

$$u_1 = 10 \text{ km s}^{-1}$$

et tirons la densité circumnébulaire de (8.19) :

$$\rho_1 = 0.83 \rho_0 (R_0/R)^2$$

Soulignons le fait que, bien que ce modèle soit construit de toutes pièces, on ne peut pas choisir toutes les vitesses librement, puisqu'on doit satisfaire à : $u_c - u_2 < c$ $\quad u_1 \geq u_2 - c^2/k u_c$

On achève de déterminer le modèle en en fixant $R_0 = 10^{-2}$ pc, $t_0 = 4\,10^{-4}$ Ma et $\rho_0 = 2.7\,10^3 M_\odot$ pc^{-3} pour être en accord avec la relation moyenne entre rayon et densité des N.P. observées. Le flux de photons ionisants est alors

déterminé :

$$N_{LYC} = 3\ 10^{47} (t/t_o)^{-1}\ ph\ s^{-1}$$

La densité nébulaire et l'évolution de R_f déterminent la luminosité mécanique du vent stellaire :

$$\ell_w = \frac{5}{2} \rho R_f^2\, dR_f/dt$$
$$= 1.7\ 10^2\ M_\odot\ pc^2\ Ma^{-3}\ srd^{-1}$$

à majorer des pertes radiatives.

2.3. Calcul planifié : le modèle K

Nous allons maintenant mettre à l'épreuve dans un calcul complet le modèle dont nous avons fait une ébauche simple dans le paragraphe précédent. Le système est initialisé à l'instant t_o = 400 ans (qui est pris comme origine des temps pour le présent calcul et sera donc noté dorénavant t = 0).

TABLE 8.3

Region nébulaire	
densité initiale[1]	$\rho_1 = 0.22\ 10^4\ (R_o/R)^2$ M⊙ pc^{-3}
vitesse initiale	$u_1 = 10$ km s^{-1}
rayon interne	$R_f = R_o = R_b = 10^{-2}$ pc
rayon externe	$R_{ex} = 0.118$ pc
masse totale	$M = 0.3$ M⊙
Etoile centrale	
N_{LYC}	$3\ 10^{47} \left(\frac{t + t_o}{t_o}\right)^{-1}$ ph s^{-1}
$\dot{M}$[2]	$6.3\ 10^{-9}$ M⊙ an^{-1}
u_w	10^3 km s^{-1}

Notes :

(1) : A cette distribution on a ajouté au voisinage de R_o $1.7\ 10^{-2}$ M⊙, soit 10^{-2} M⊙ représentant la masse de gaz ionisé $m(t_o)$ et $7\ 10^{-3}$ M⊙ pour la masse de la coquille de gaz neutre $m_c(t_o)$. Ce gaz est initialement neutre et animé

de la même vitesse que le reste, soit 10 km s^{-1}.

(2) : On aurait eu un résultat équivalent avec un taux de perte de masse plus faible et une vitesse plus grande, en conservant la luminosité mécanique. Le couple ($\dot{M}$, u_w) choisi, avec une valeur modérée de u_w, rend le calcul numérique moins pénible.

L'examen de la Fig. 10 montre que le modèle K répond à ce qu'on en attendait. Entre t = 1 000 et t = 5 000 ans, la structure dynamique reste conforme au plan, à quelques petites différences près :

- La vitesse du bord interne u_f, la vitesse du gaz derrière et devant le front d'ionisation, u_2 et u_c sont respectivement de 14 km s^{-1} au lieu de 12.5, 20 km s^{-1} au lieu de 17.7, et 29 km s^{-1} au lieu de 25.

- La masse ionisée est plus grande que prévu.
cette différence est une conséquence de l'expansion plus rapide que prévue. Ces points mineurs mis à part, on peut remarquer que la structure dynamique, en particulier le profil de vitesse, s'est établie "naturellement", n'étant pas (sauf la vitesse initiale du gaz circumnébulaire) explicitement présente dans les conditions initiales.

Ce modèle illustre un point important, qui semble évident, mais ne semble pas avoit été bien reconnu dans les discussions des observations de N.P. : la distinction entre la vitesse *apparente* d'expansion u_2 -qui est la plus grande vitesse radiale observée dans le gaz ionisé-, la vitesse *réelle* d'expansion u_c -qui est la vitesse radiale de la coquille neutre comprimée-, et enfin la vitesse d'expansion du gaz circumnébulaire ou vitesse d'*éjection* de la nébuleuse protoplanétaire par l'étoile apparente. Les observations de raies d'émission du gaz neutre sont rares ; à notre connaissance, la seule illustration de la distinction entre u_2 et u_c est donnée par IC 418 (voir Table 1 de la Section 2). Les raies de [O III] et [Ne III] indiquent la vitesse d'expansion de la partie interne de la nébuleuse ionisée : $u_f \simeq 0$; [O II] et [N II] sont émises plus à l'extérieur et indiquent $u_2 \simeq 10$ km s^{-1}; Mg I, [O I] et [S II] sont émises dans le gaz neutre, probablement excitées par le choc isotherme situé en R_s, et indiquent $u_c \simeq 18$ à 25 km s^{-1}. Une conséquence du fait que $u_c \neq u_2$ est que les *âges indicatifs*, obtenus en divisant le rayon

par la vitesse d'expansion, sont surestimés, et que les distances obtenues par la méthode de la vitesse d'expansion ($v_r/\dot{\theta}$) sont sous-estimés. Dans l'impossibilité où on se trouve, jusqu'à maintenant, d'observer la vraie vitesse d'expansion u_c, la distinction entre u_2 et u_c restera un voeu pieux.

La Fig. 10 montre, de manière particulièrement claire pour le modèle K, la structure du profil de vitesse radiale au voisinage du front d'évaporation. On remarque une décroissance rapide de la vitesse radiale vers l'intérieur. On avait espéré, au début de cette étude, expliquer les vitesses radiales "aberrantes" observées dans certaines N.P. pour les raies de [Ne V] λλ3345-3425 en supposant qu'elles étaient émises dans le front d'évaporation, dans la zone de forts gradients de vitesse radiale. Ne^{4+} est l'état d'ionisation dominant (dans le cas où l'ionisation collisionnelle domine) entre 2.5 et 4 10^5 K (JORDAN, 1969). Il faudrait pour mettre à l'épreuve cette hypothèse, faire un calcul détaillé, hors d'équilibre, de la structure d'ionisation dans le front d'évaporation. Toutefois, un argument énergétique permet de montrer qu'elle est probablement fausse. Les raies de [Ne V] sont souvent observées avec une intensité de l'ordre de, ou même supérieure à celle de H_β (KALER, 1976), donnant un flux typique à la Terre de 10^{-10} erg cm^{-2} s^{-1} pour une N.P. située à 1 kpc ; ce qui conduit à une puissance totale : $P(Ne\ V) = 10^{34}$ erg $s^{-1} = 1.5\ 10^4$ Mo pc^2 Ma^{-3}. Par ailleurs, la puissance des pertes radiatives dans le front d'évaporation (dont les raies [Ne V] ne représentent qu'une faible fraction) est de l'ordre de $3\ 10^3$ Mo pc^2 Ma^{-3}.

Nous abordons, plus généralement, la question des possibilités d'observer directement la cavité coronale. En généralisant l'argument ci-dessus, le fait que la luminosité mécanique du vent stellaire soit de l'ordre de 1/1 000 de la luminosité optique du noyau laisse peu d'espoir d'observer en émission des raies issues de la région coronale. En absorption, le meilleur candidat est le doublet de résonance de O VI λλ 1031-1037. O^{5+} est l'état d'ionisation dominant autour de $3\ 10^5$ K. La densité surfacique d'ion O VI, calculée pour les modèles J ou K, à l'époque t = 3 000 ans, est environ de 10^{13} cm^{-2}, et la largeur équivalente de la raie d'absorption de l'ordre de 10^{-2} Å. Une telle raie d'absorption n'est pas accessible aux instruments existant actuellement (Copernicus et IUE) qui manquent soit de résolution, soit de sensibilité, soit d'étendue spectrale. Même si une telle raie était détectée, il ne serait pas aisé de prouver qu'elle n'est pas issue d'une éventuelle couronne du noyau de la N.P.

Voyons enfin si la cavité coronale peut être détectée par son émission X. A l'époque t = 3 000 ans et pour le modèle K, la cavité coronale est caractérisée par :

$$\rho \simeq 0.3\ M_\odot\ pc^{-3} \qquad n \simeq 10\ cm^{-3}$$

$$\epsilon_c \simeq 1.3\ 10^4\ pc^2\ M_\odot^{-2} \qquad T_e \simeq 1.3\ 10^6\ K$$

$$R \simeq 4\ 10^{-2}\ pc$$

La coupure exponentielle du spectre intervient aux énergies supérieures à kt$\simeq$100 eV. Mais l'opacité aux rayons X du gaz nébulaire, qui décroît en ν^{-3} jusqu'à 500 eV, est à 100 eV de l'ordre de $\tau_x = 100$. Les rayons X émis par la cavité coronale sont donc trop mous pour traverser la nébuleuse.

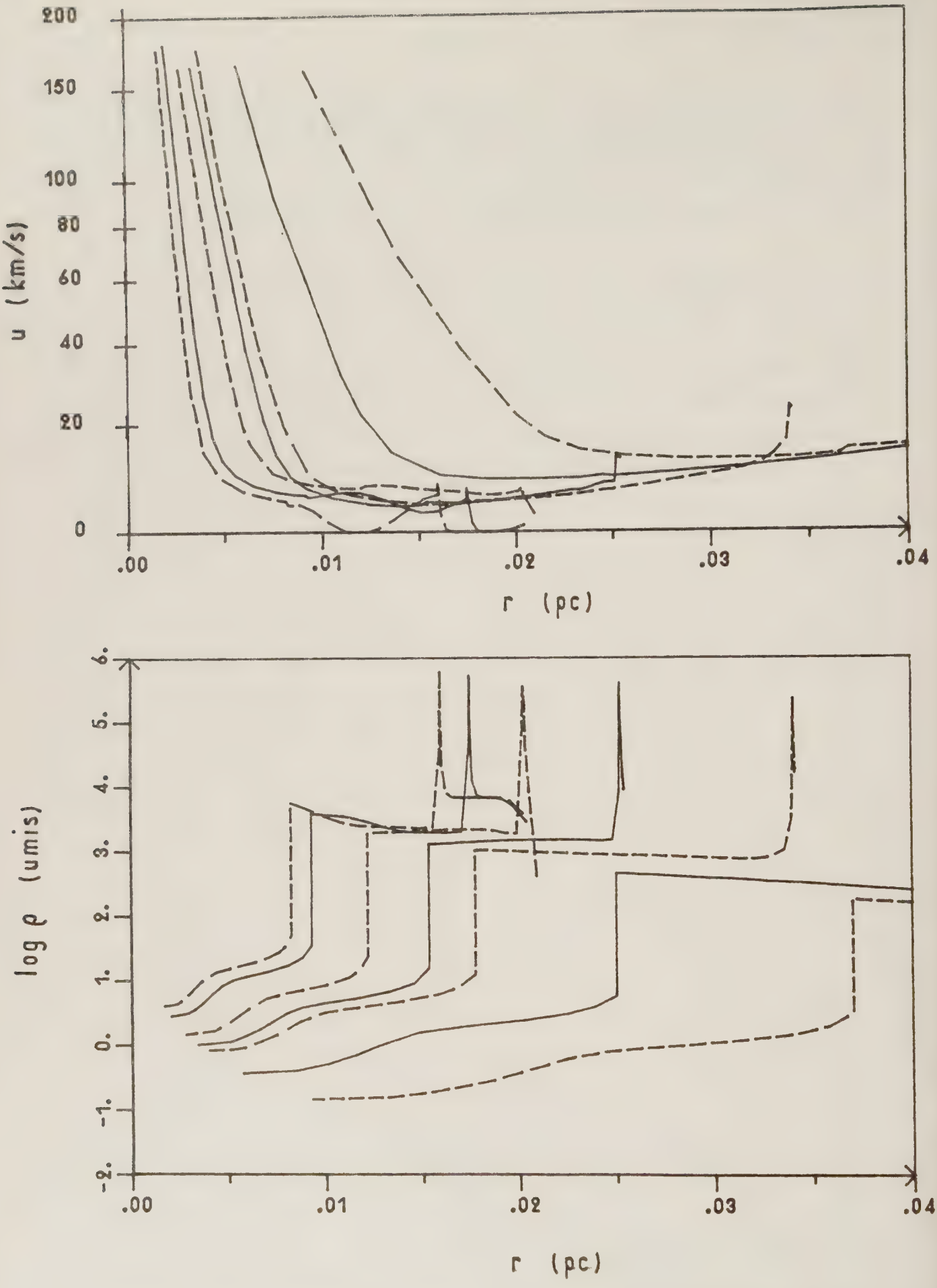
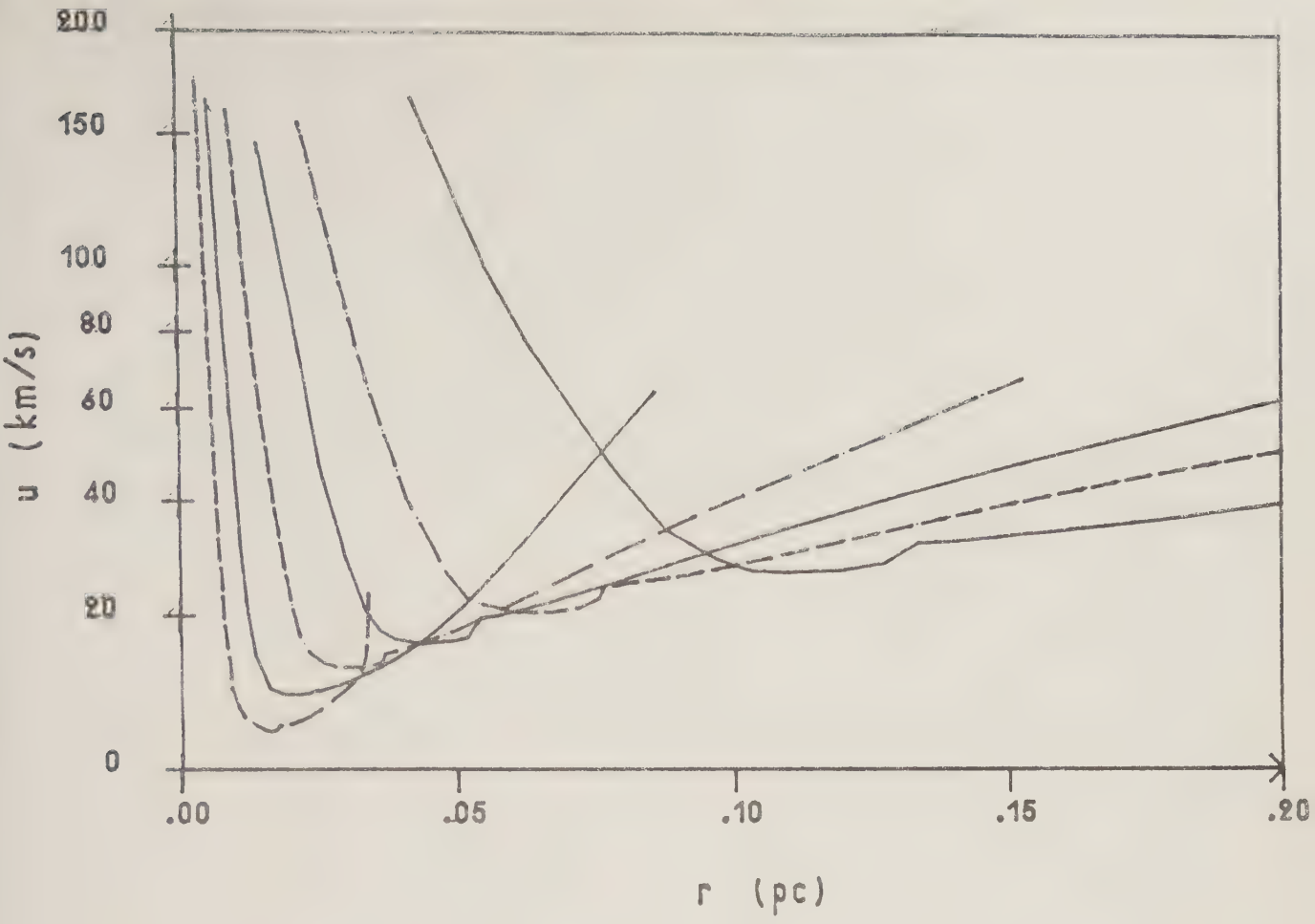


Figure 1 a-b : Profils de vitesse et de densité représentant l'évolution du modèle B. Les profils tracés donnent l'état du modèle aux instants t = 400, 600, 1000, 1500, 2000, 3000, et 4000 ans.



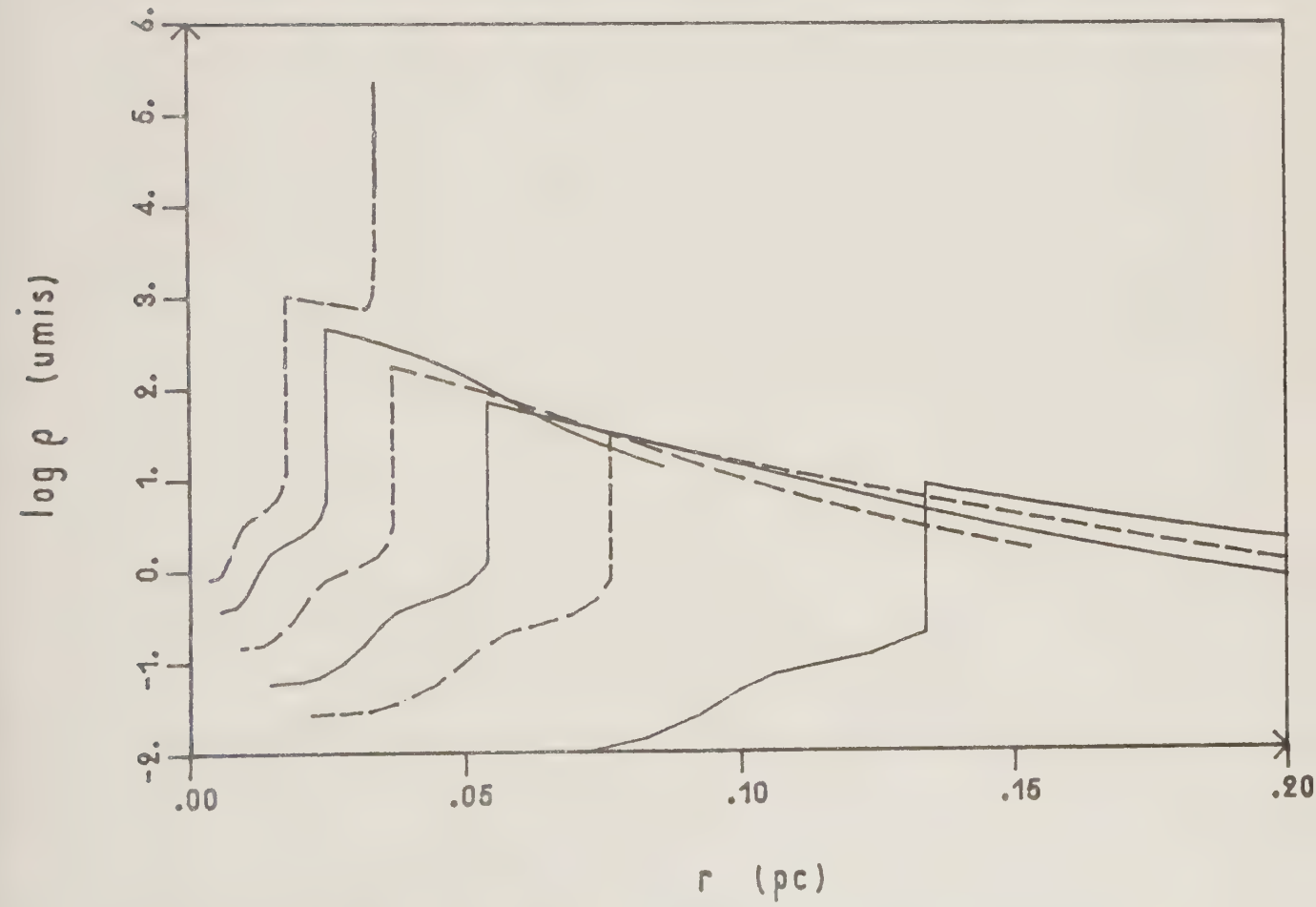


Figure 1 c-d : Suite de l'évolution du modèle B . Etat du modèle aux instants t = 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, et 8000 ans.

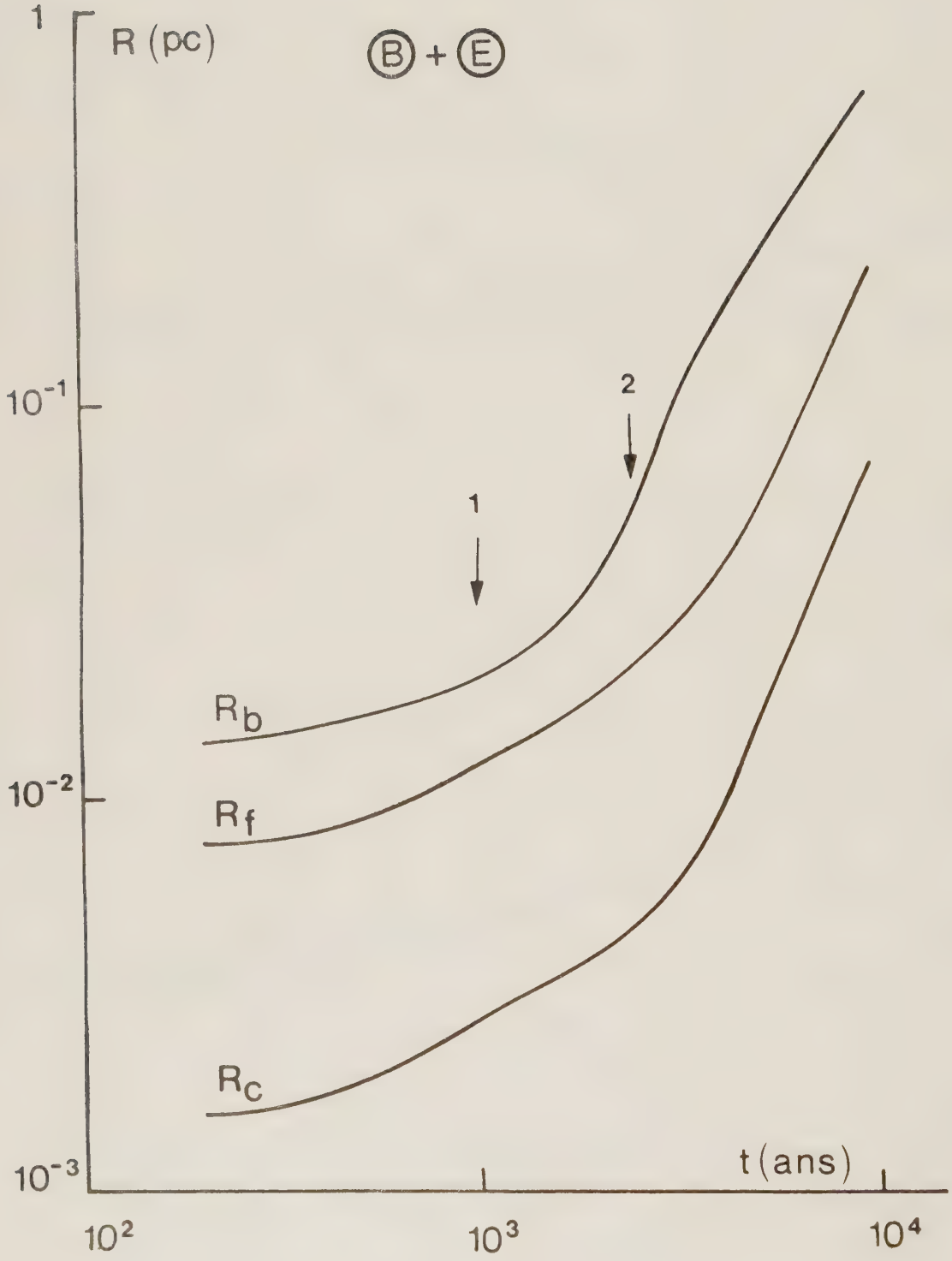


Figure 2a : Loi d'expansion des rayons R_c, R_f, et R_b pour les modèles B et E (les deux modèles sont identiques de ce point de vue). Les flèches marquées 1 et 2 repèrent les instants où le choc externe atteint le bord de la nébuleuse, et où la nébuleuse est entièrement ionisée.

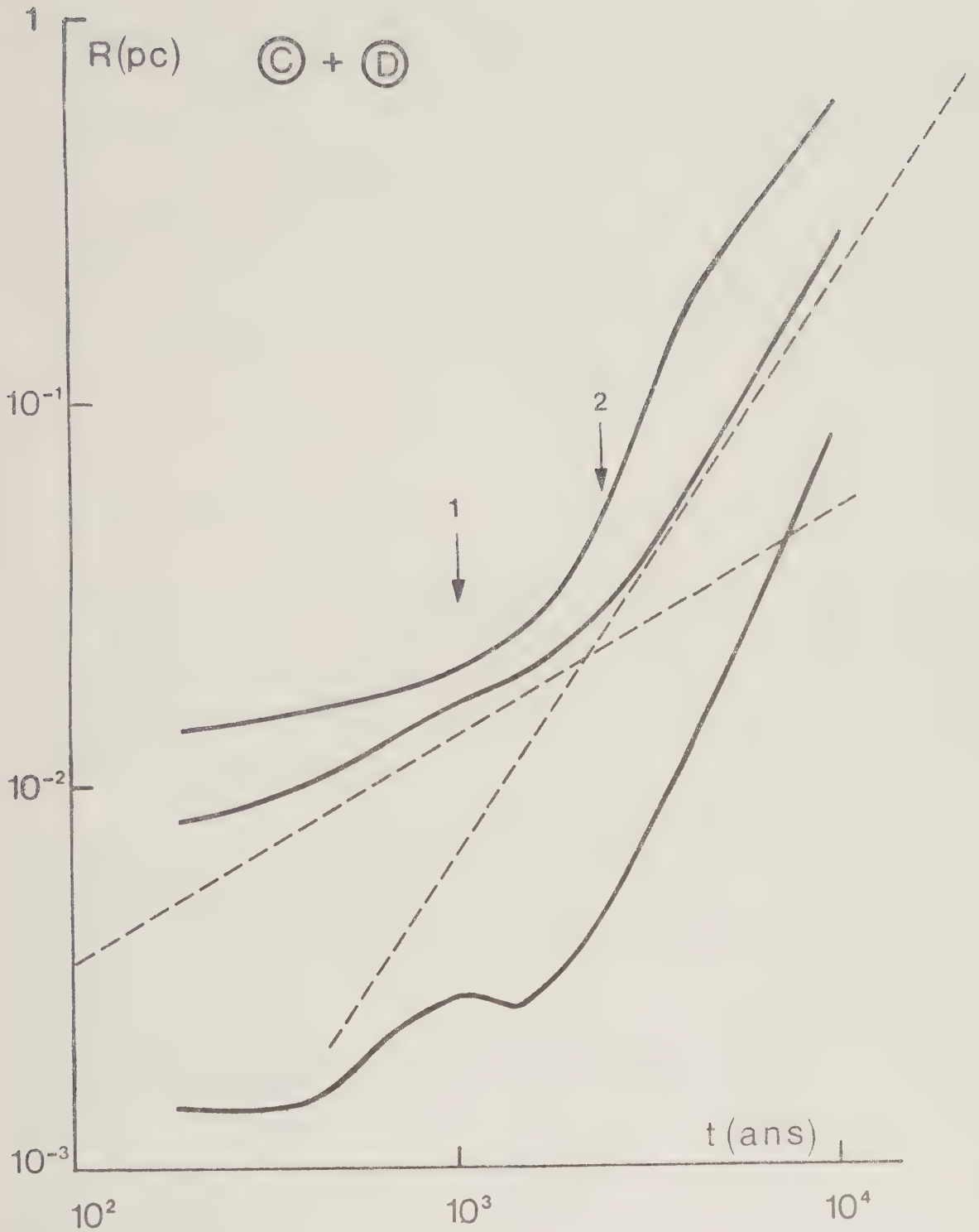


Figure 2b : Comme la figure précédente pour les modèles C et D.

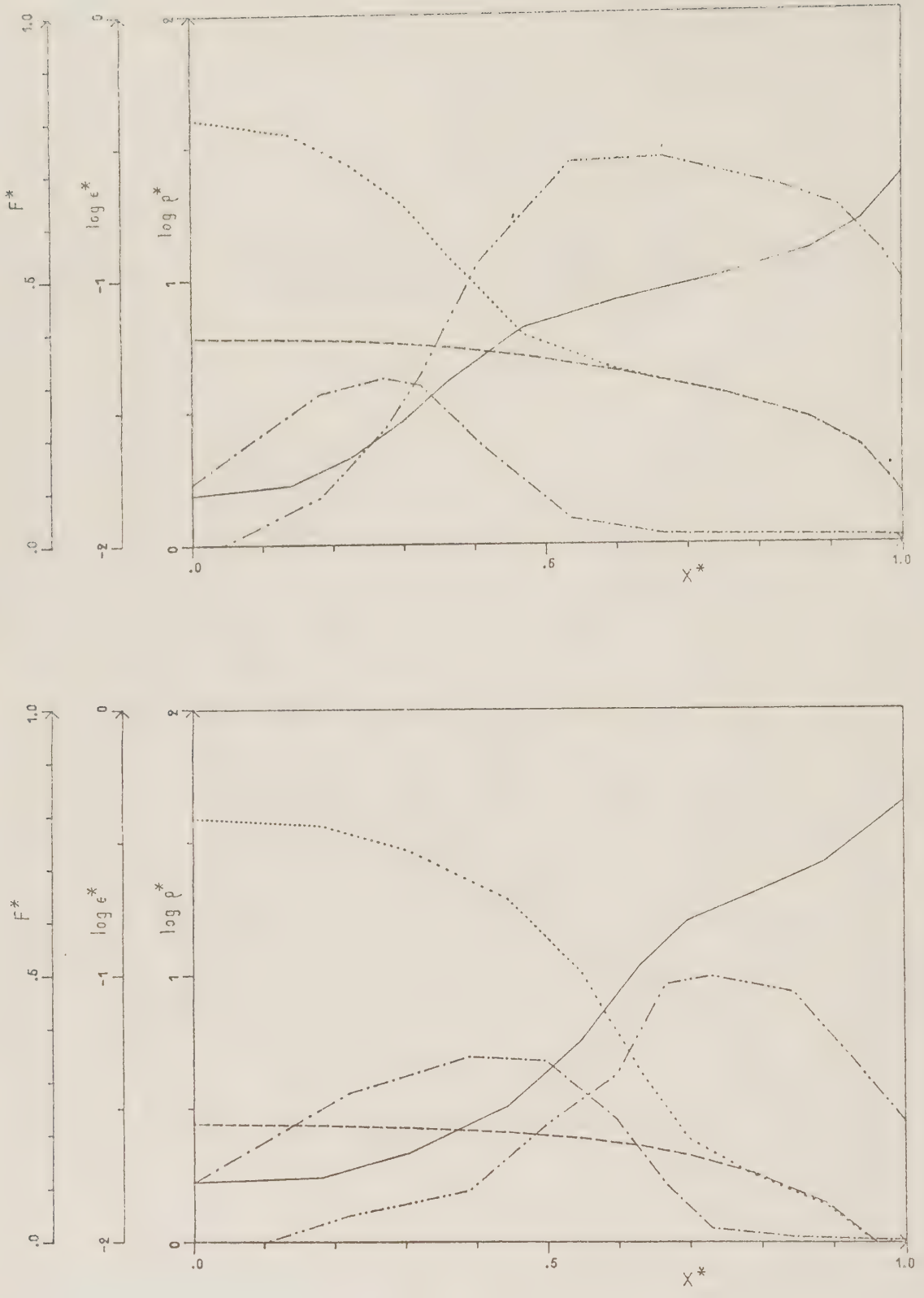


Figure 3 a-b : Structure de la région coronale du modèle B aux époques t = 3000 et t = 8000 ans. Noter que le couplage ion - électron devient moins efficace et que la zone de conduction ionique dominante et saturée s'étend au cours du temps.

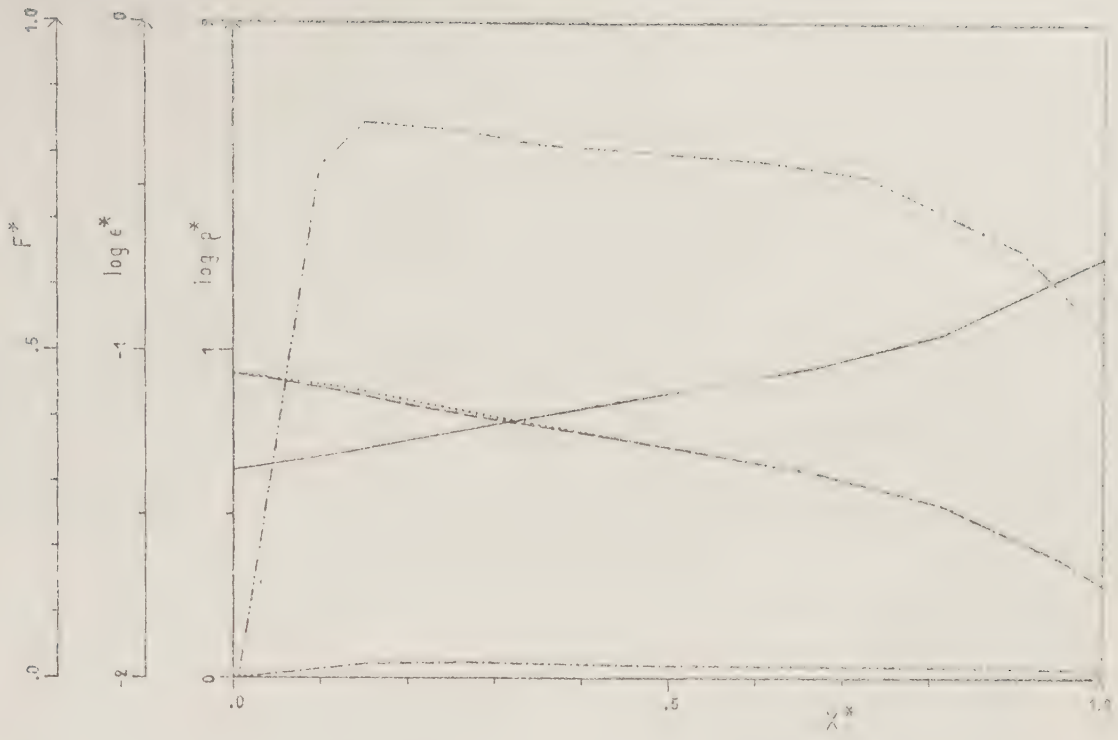


Figure 3 c : Comme la figure précédente pour le modèle E (avec relaxation forcée dans le choc). La chute brutale du flux conductif électronique au bord interne vient de ce que la première zone représente en fait l'épaisseur du choc où s'effectuent les échanges d'énergie en respectant les relations de conservation.

Normalisation des variables et conventions de dessin adoptées pour la représentation de la structure de la région coronale.

X^* : Variable radiale, $X^* = (r-R_c)/(R_f-R_c)$

F^* : flux conductif par stéradian normalisé au flux énergétique du vent stellaire : $F_o = \frac{1}{2} \dot{m} u_w^2$. Ordonnées linéaires. Trait : -.-.-. pour le flux conductif ionique, et : -..-..- pour le flux conductif électronique.

ϵ^* : énergie interne spécifique, ions et électrons, normalisée à $\epsilon_o = \frac{1}{4} u_w^2$. Ordonnées logarithmiques. Trait : ..... pour les ions, et ---- pour les électrons.

ρ^* : densité, normalisée à $_o = 4 \dot{m}/u_w R_c^2$ (choc fort adiabatique). Ordonnées logarithmiques. Trait continu ————.

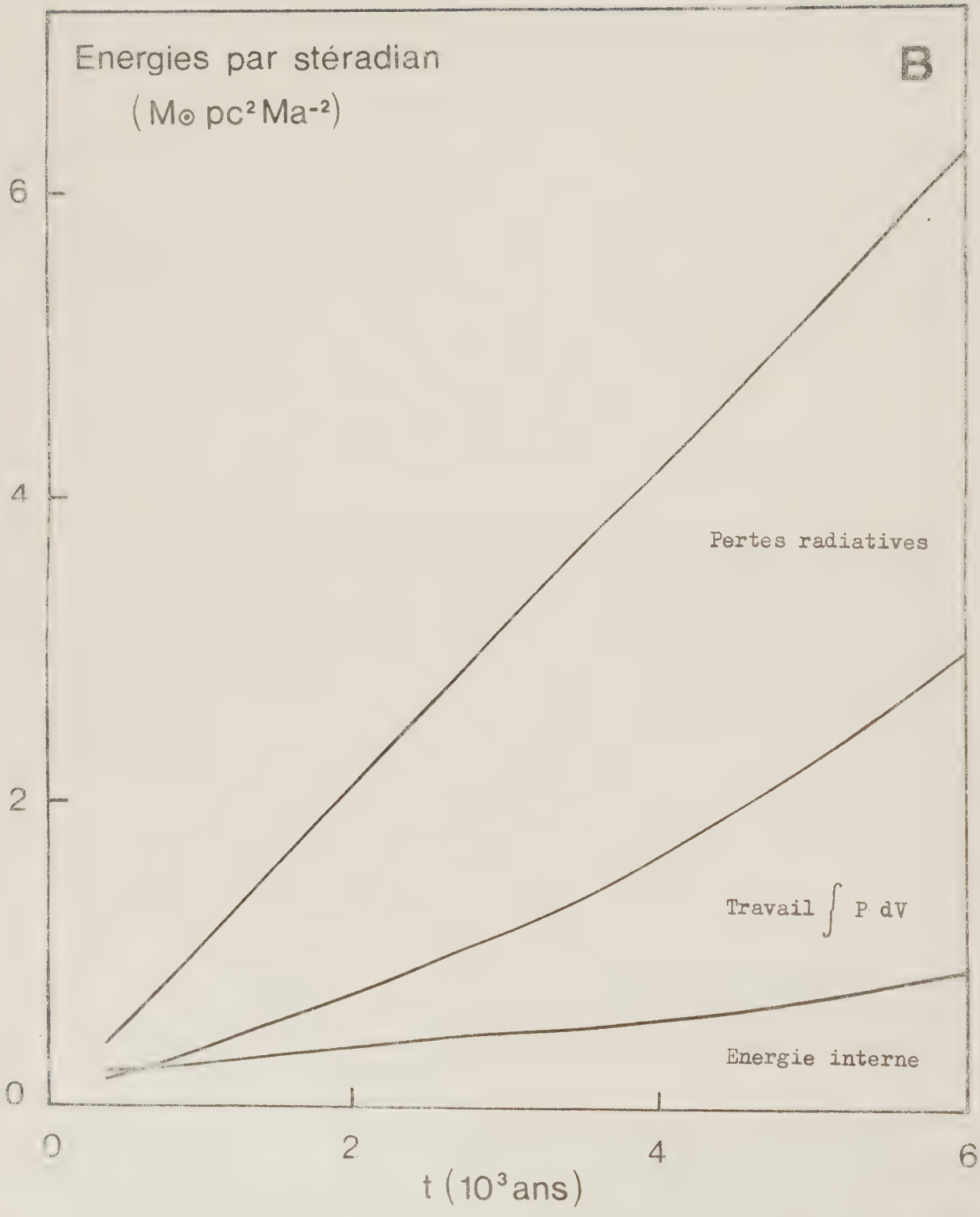


Figure 4 a .: Bilan d'énergie du modèle B

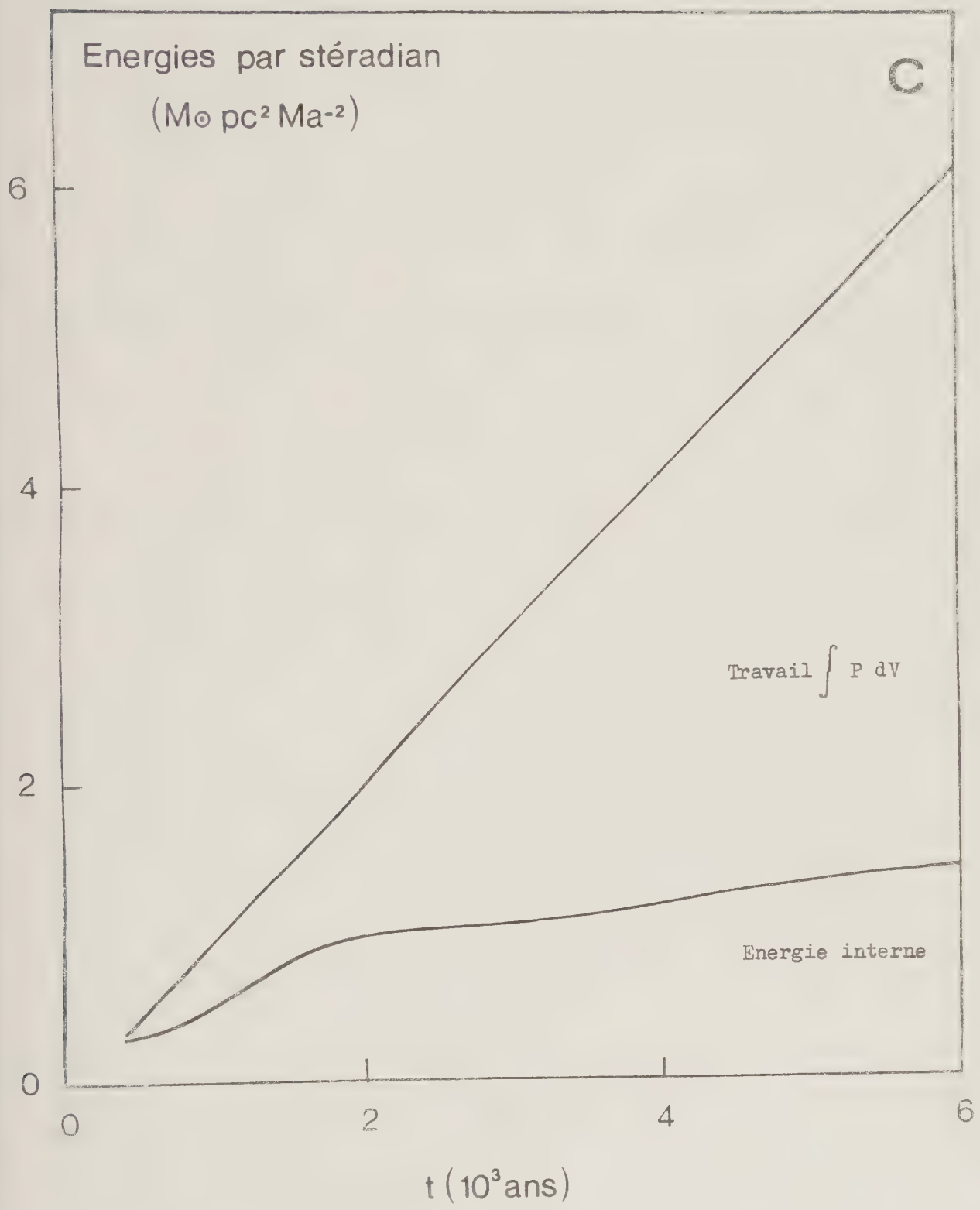
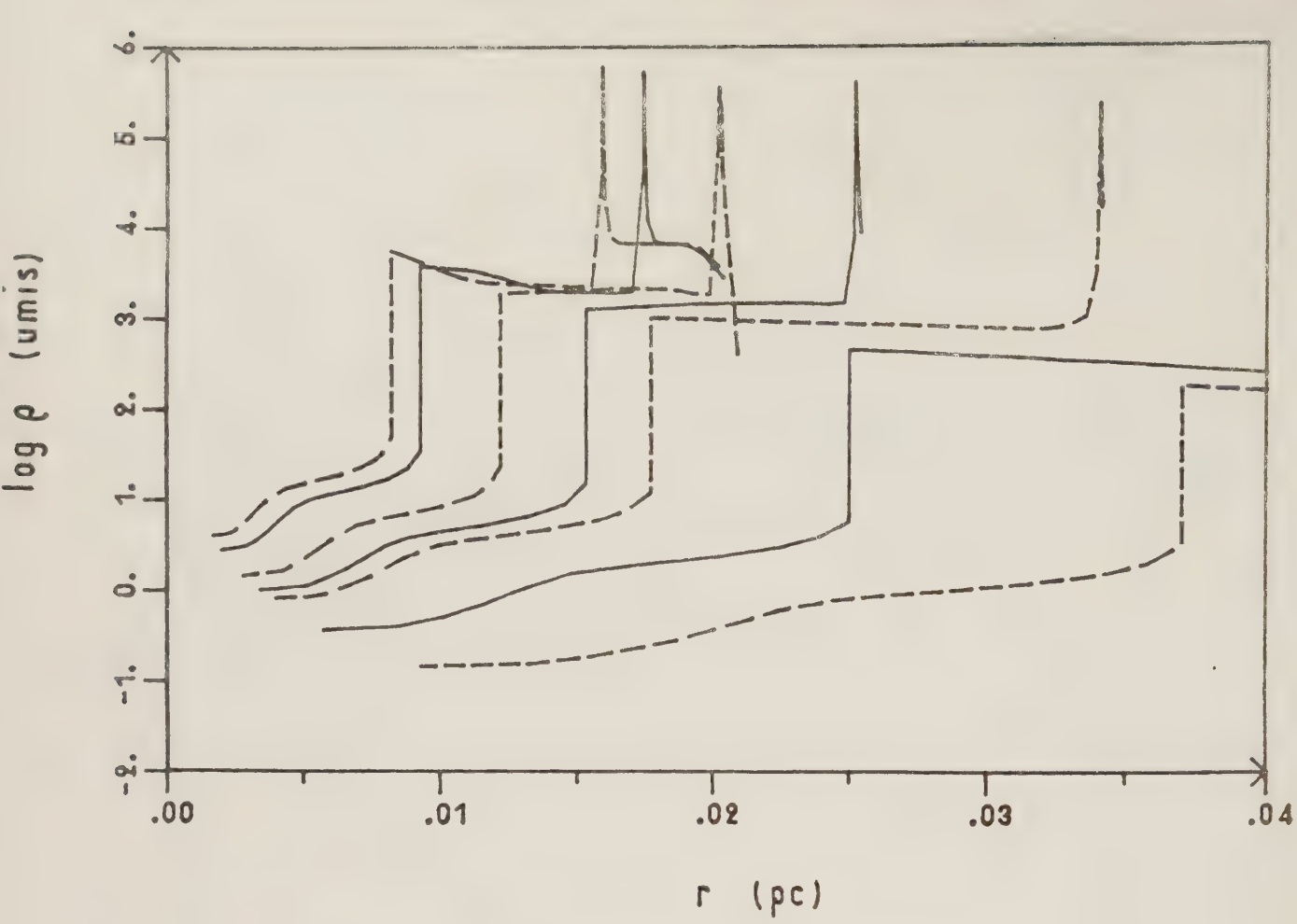


Figure 4 b : Bilan d'énergie du modèle C (sans pertes radiatives)



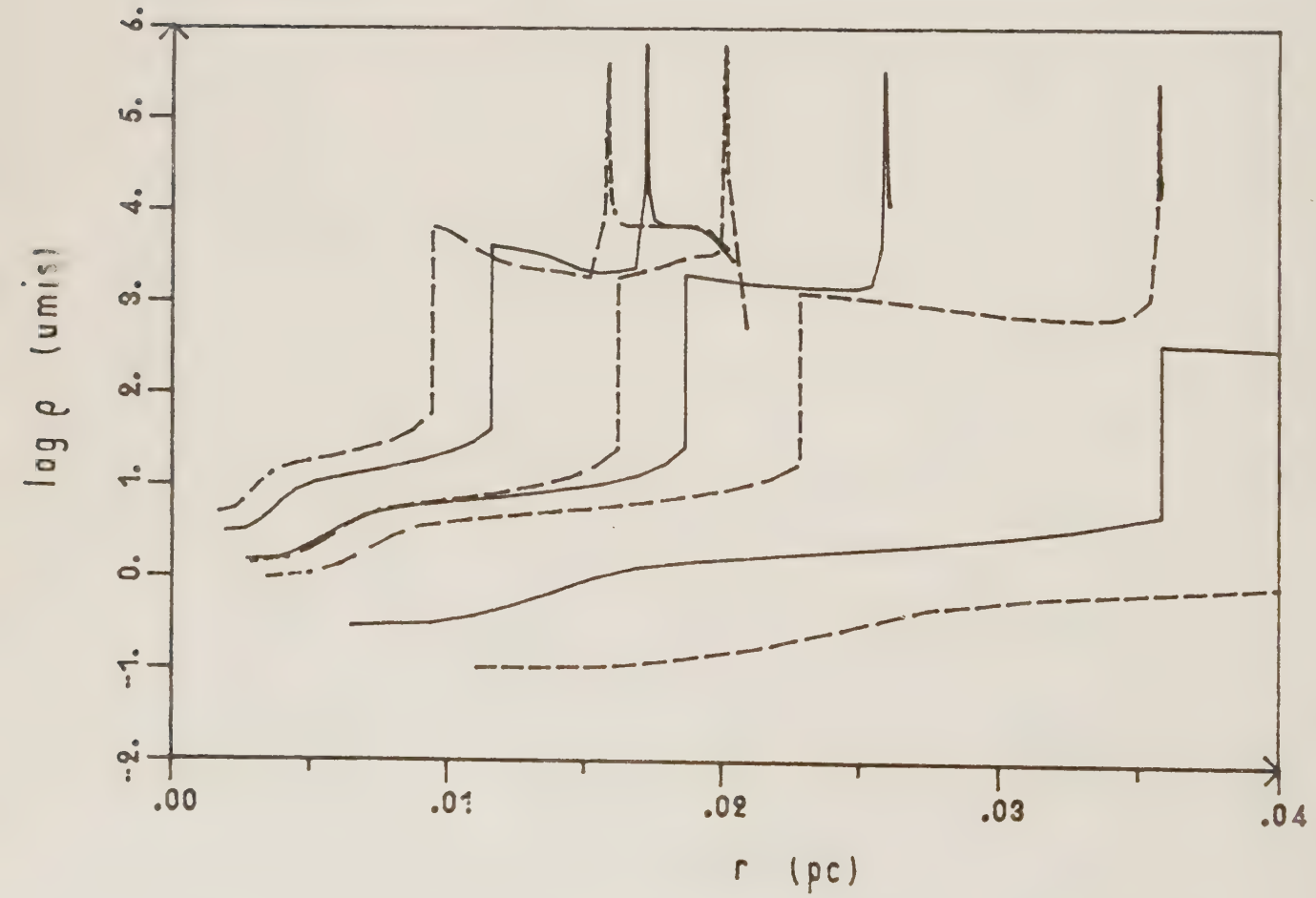


Figure 5 : Comparaison de l'expansion des modèles B et C. On remarque l'expansion plus rapide du modèle sans pertes radiatives.

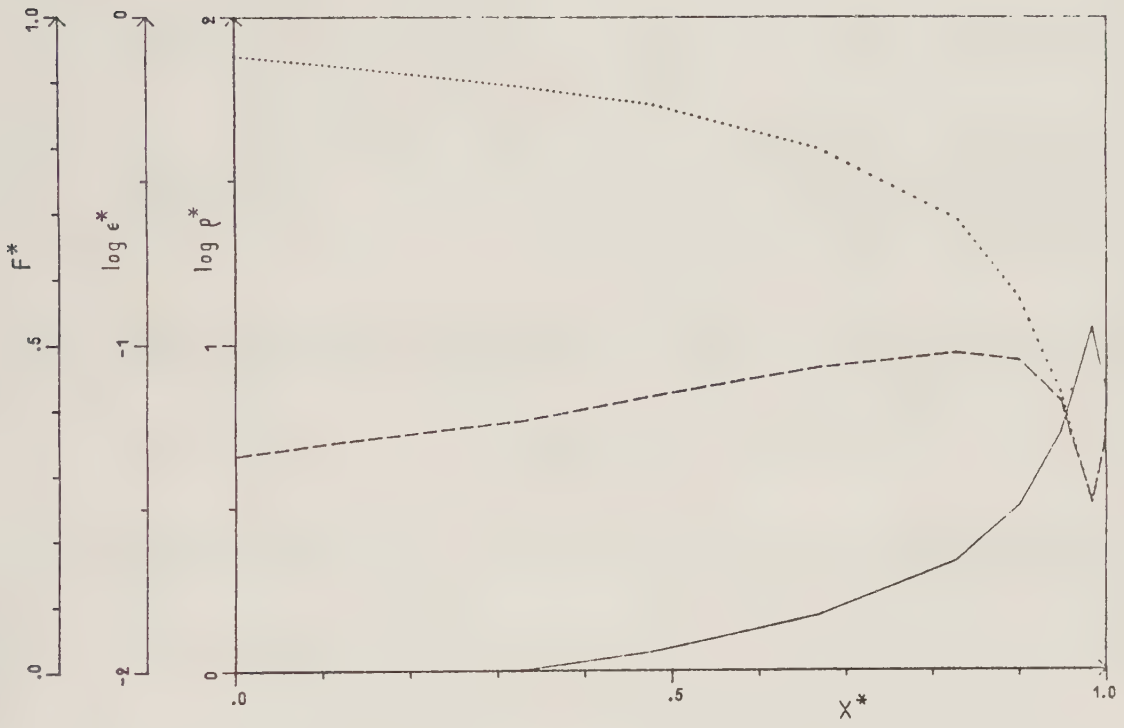
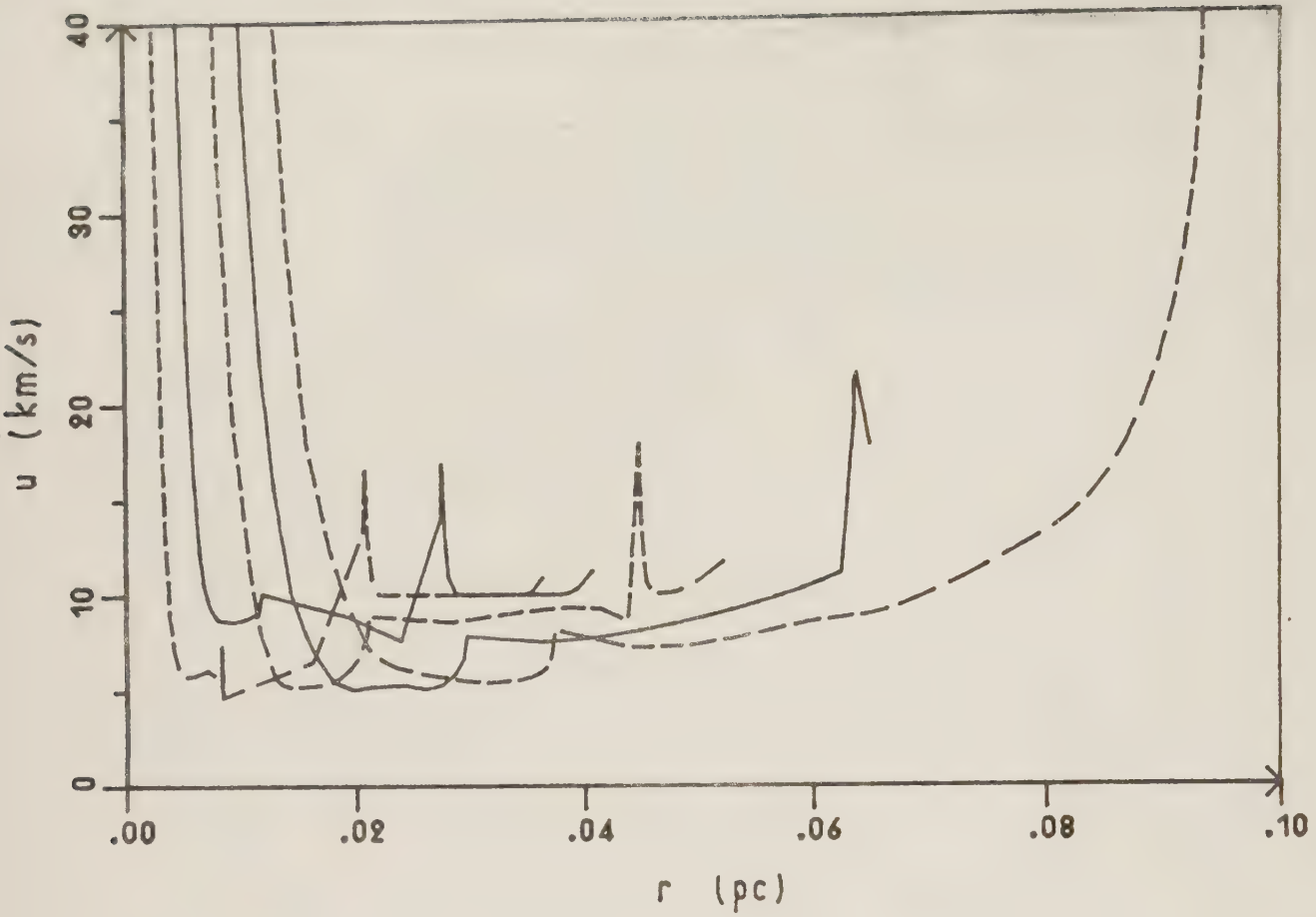


Figure 6 : Structure de la région coronale du modèle D (adiabatique). Voir le texte au sujet des oscillations au voisinage de la frontière externe.



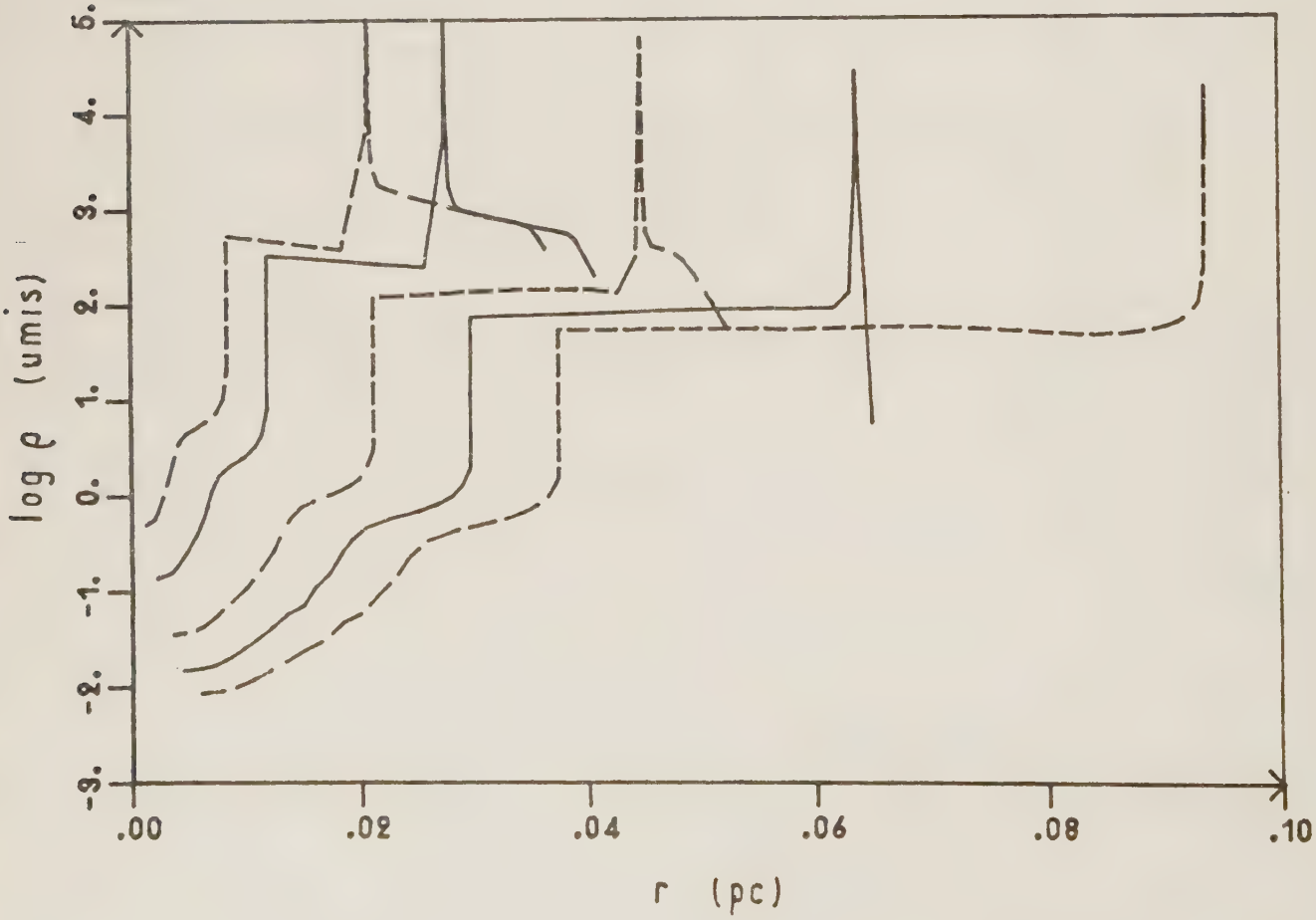
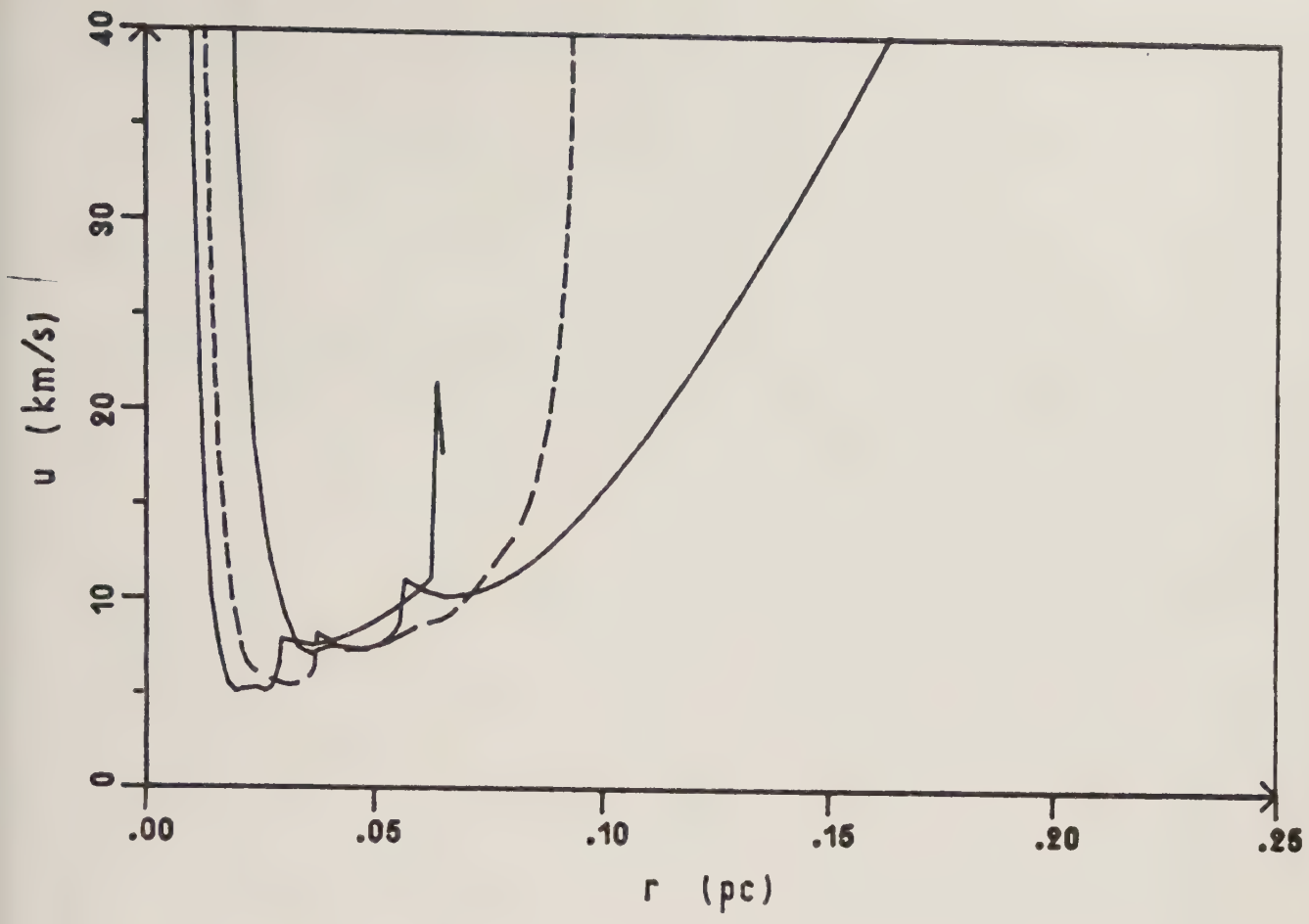


Figure 7 a-b : Evolution des profils de densité et de vitesse du modèle J. Les tracés correspondent aux époques t = 600, 1000, 2000, 3000, et 4000 ans.



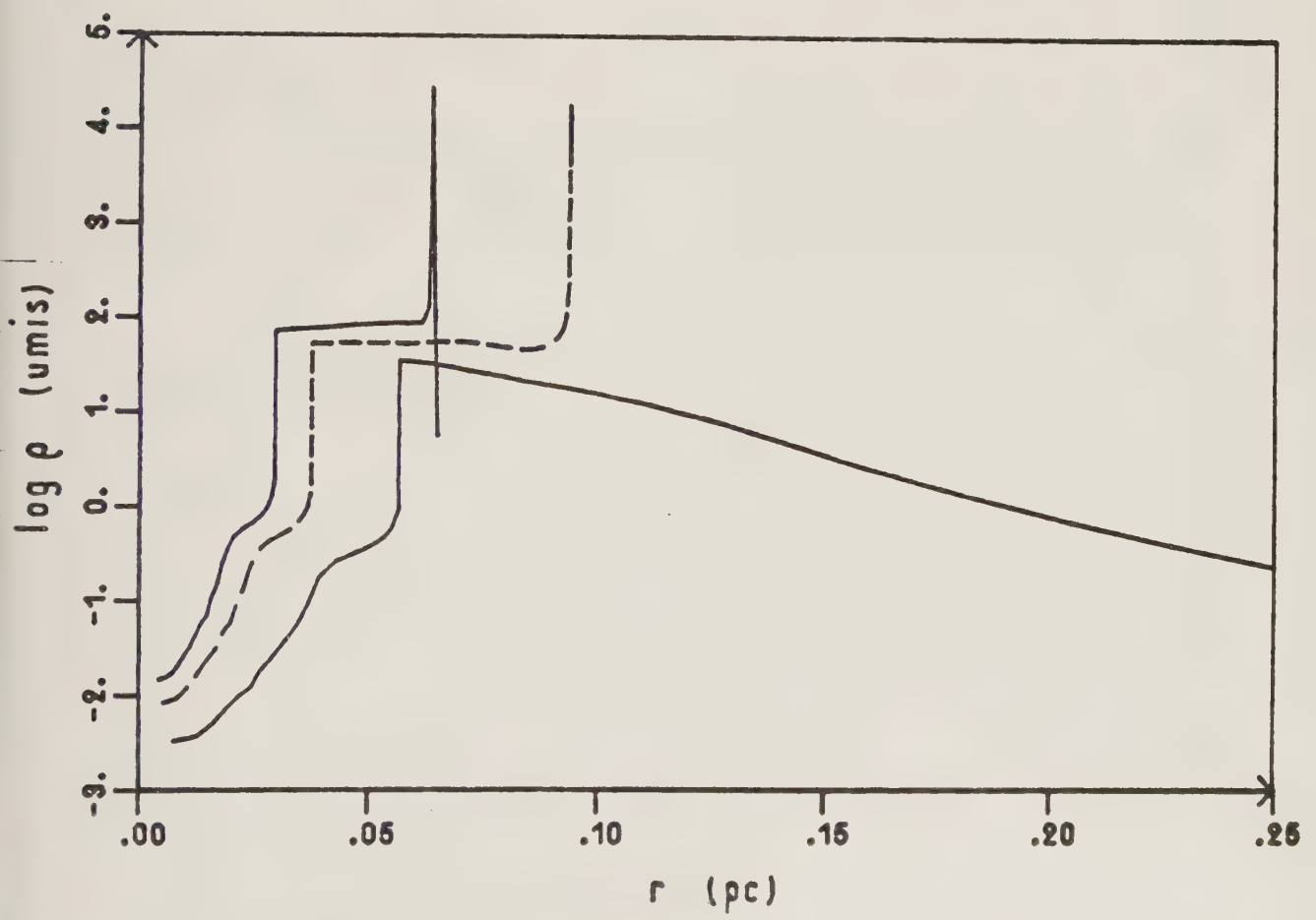


Figure 7 c-d : Suite de l'évolution du modèle J. Tracés aux époques t = 3000, 4000, et 6000 ans.

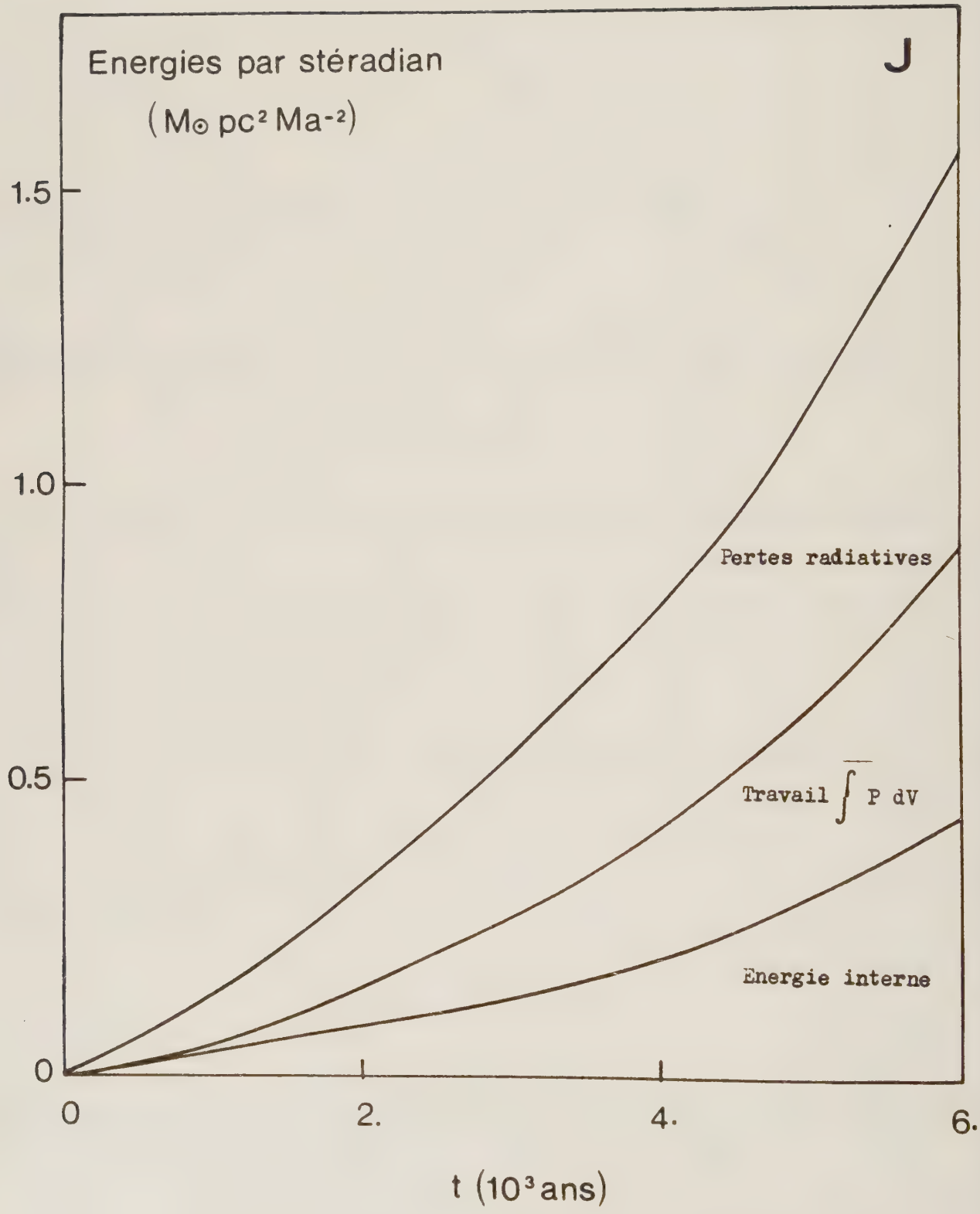


Figure 8 : Bilan d'énergie du modèle J.

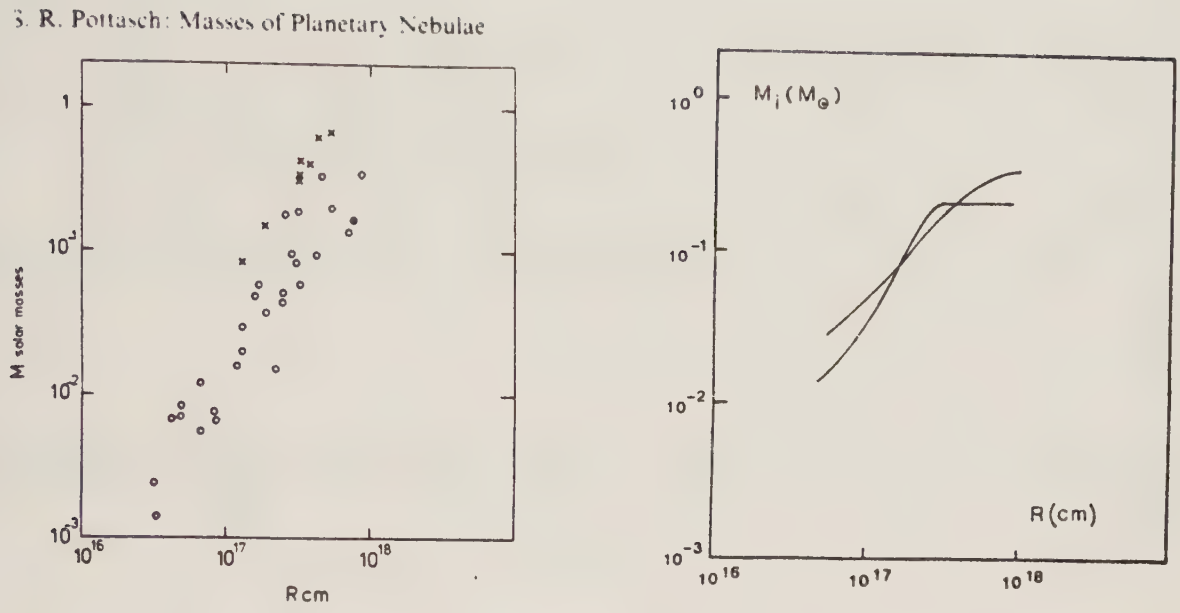
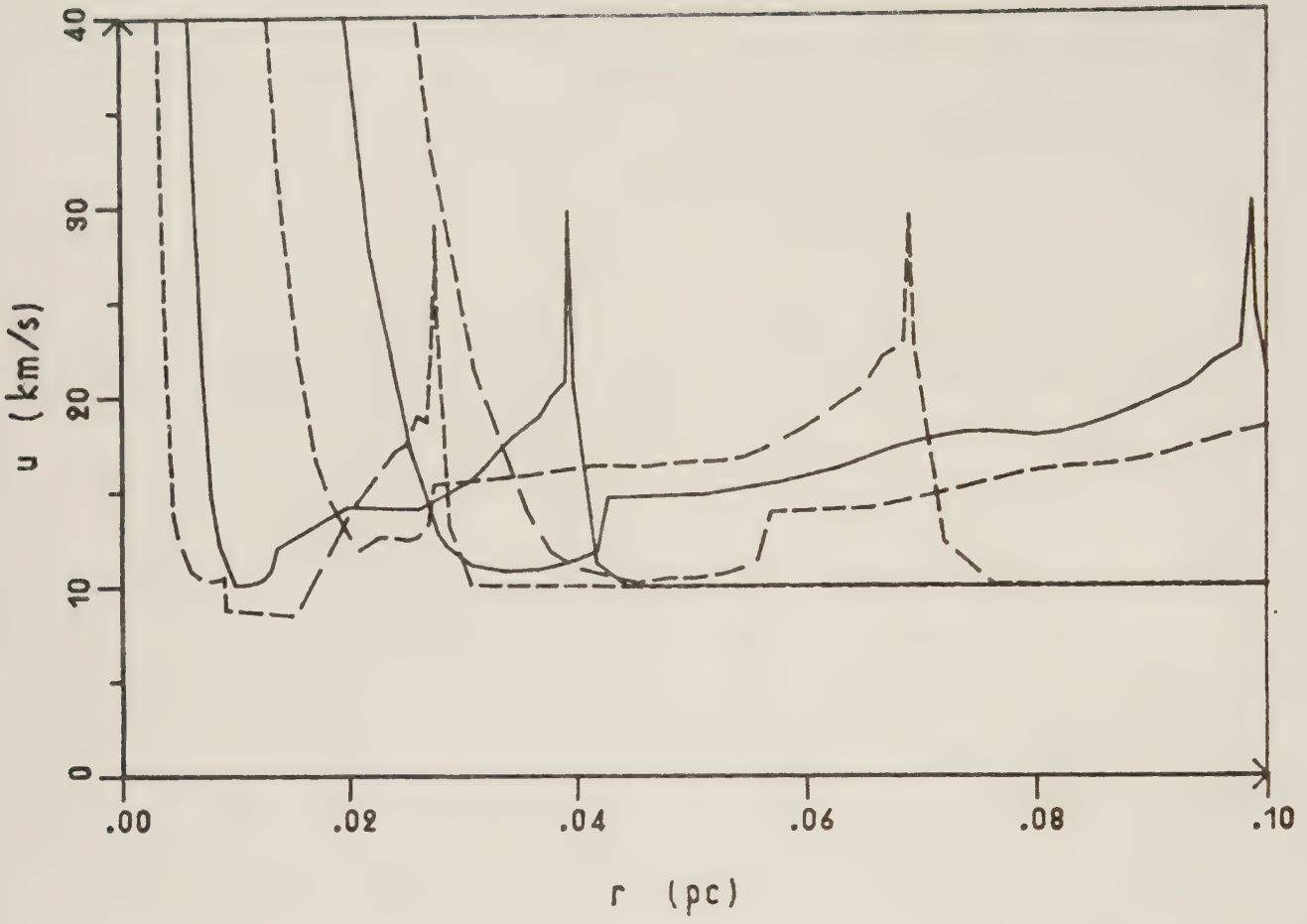


Figure 9 : Comparaison des relations entre la masse ionisée et le rayon des nébuleuses planétaires; d'une part suivant des observations rassemblées par Pottasch (1980), d'autre part pour les modèles J et K.



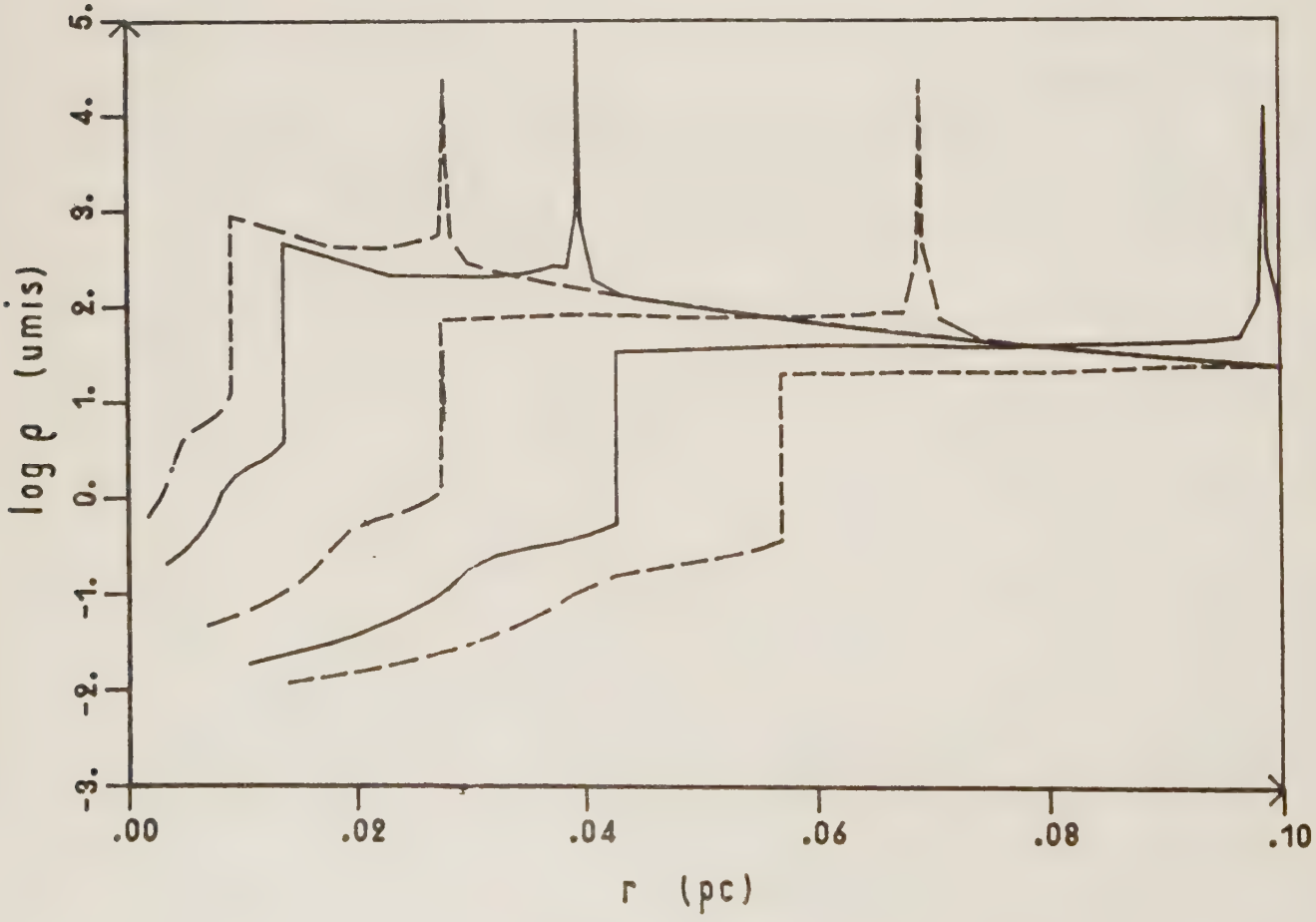
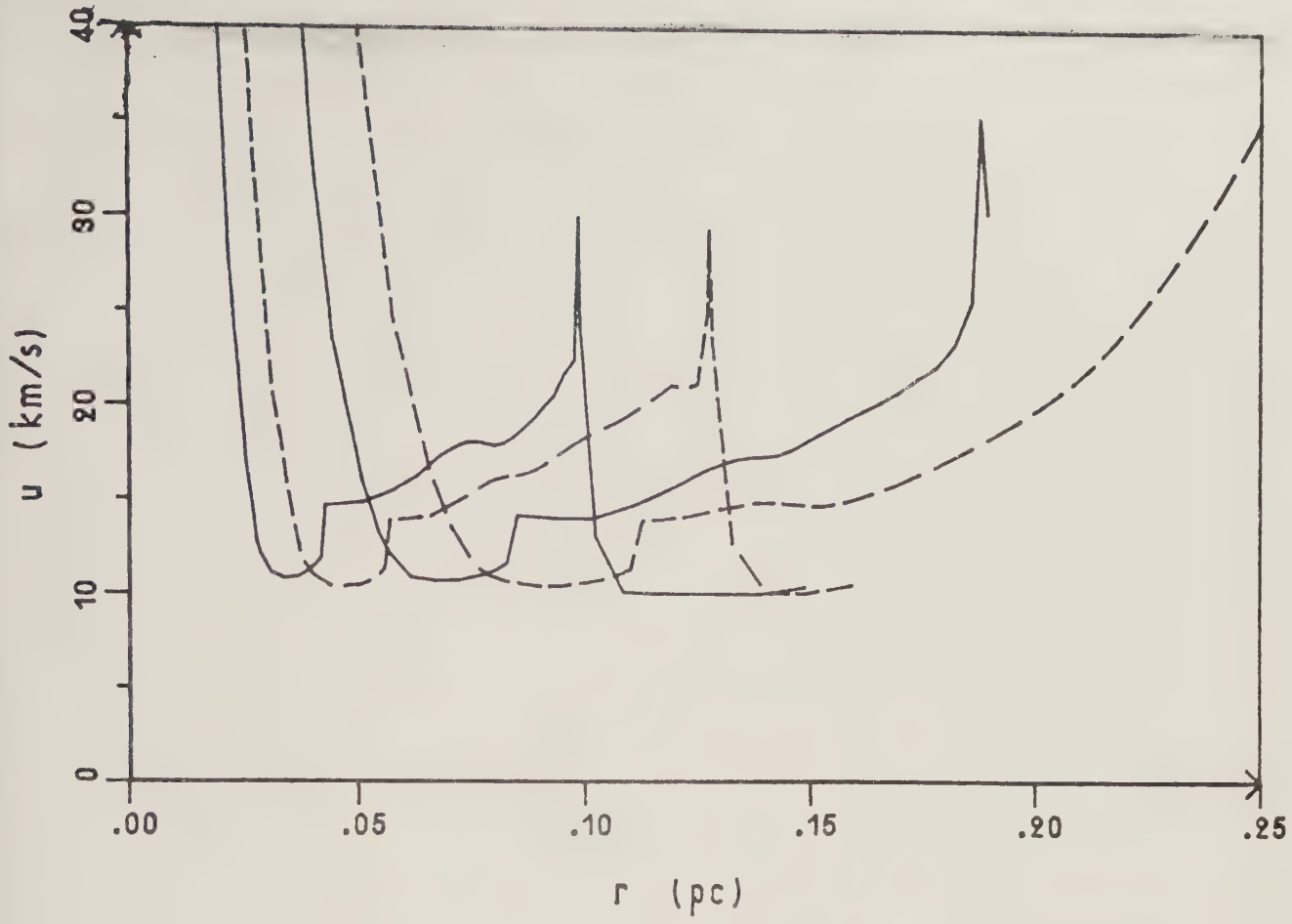


Figure 10 a-b : Densité et vitesse pour le modèle K aux époques t = 600, 1000, 2000, 3000, et 4000 ans.



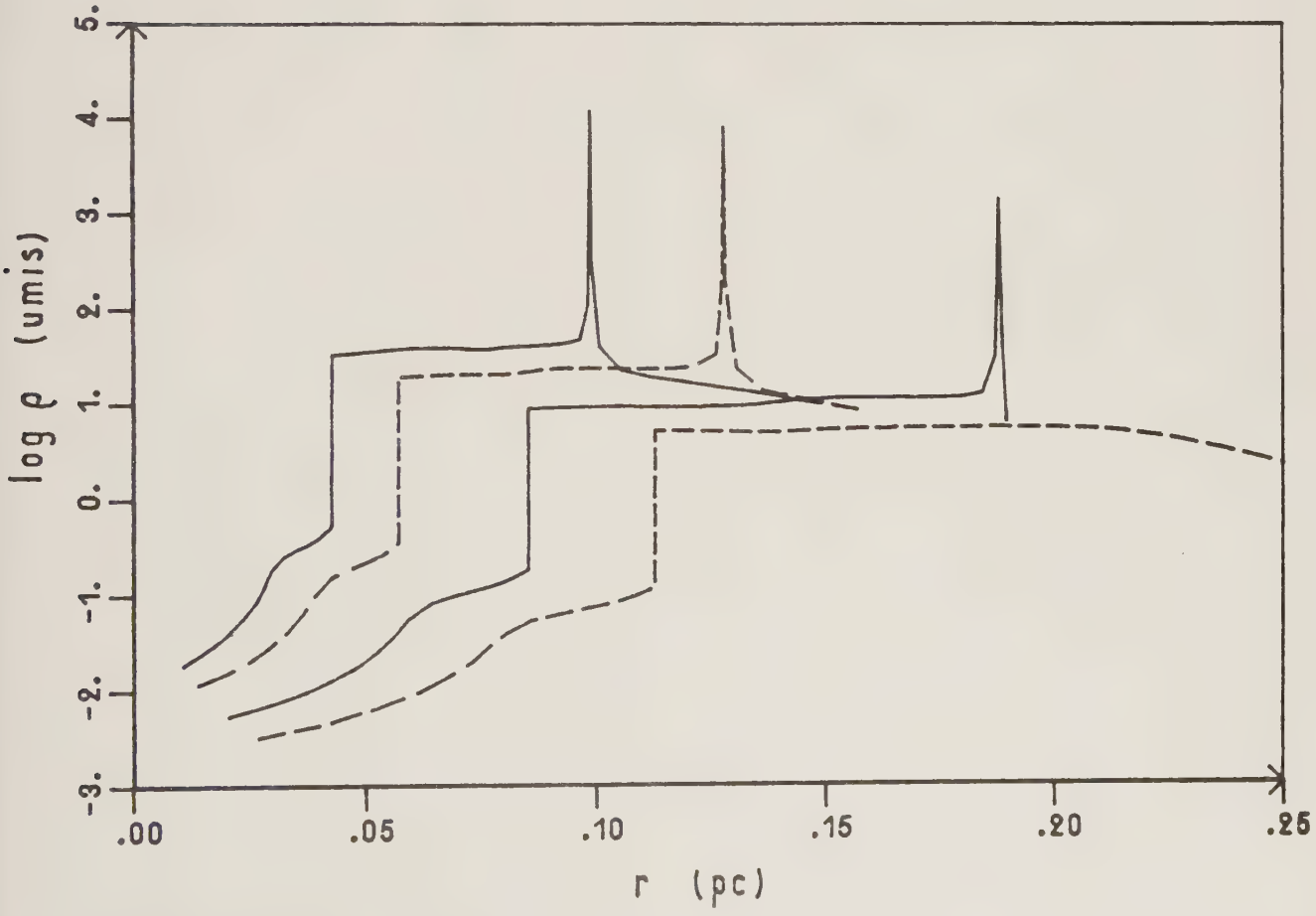


Figure 10 c-d ; Suite de l'évolution pour les époques t = 3000, 4000, 6000, et 8000 ans.

Section 9

CONCLUSION

Nous avons présenté dans les pages qui précèdent un modèle dynamique de nébuleuse planétaire. Il est caractérisé par l'hypothèse que la cavité centrale est remplie de gaz à faible densité et à haute température, résultant de l'interaction du vent stellaire du noyau avec la nébuleuse. L'idée que la thermalisation de l'énergie cinétique d'un vent stellaire à la rencontre du gaz qui l'entoure puisse donner naissance à une cavité où régnent des conditions de type coronal n'est pas nouvelle, et ce type de situation a déjà été envisagé dans le cas des étoiles du haut de la séquence principale, ou encore pour les objets quasi-stellaires.Par contre, l'application d'un modèle de ce genre au cas des nébuleuses planétaires n'a pas, à notre connaissance, été envisagée auparavant, bien que l'idée en paraisse évidente une fois énoncée. Il est même frappant de constater que, dans la discussion des observations faites grâce à I.U.E. des vents des noyaux de N.P. (qui sont venues à point pour étayer notre modèle) les auteurs jaugent l'éventuelle importance dynamique des pertes de masse observées en fonction du débit d'impulsion, donc dans le cadre d'un modèle avec choc inélastique, alors que c'est le débit d'énergie qui importe en premier lieu.

Dans le cours de la construction de notre modèle, nous avons procédé à une étude assez détaillée de la structure de la cavité coronale, en particulier du choc interne où est thermalisée l'énergie cinétique du vent stellaire, et de la surface de contact entre le gaz coronal, chaud et ténu, et le gaz de la nébuleuse proprement dite. Les résultats ne sont pas spectaculaires : la propriété de la cavité coronale qui importe pour l'évolution du reste de la nébuleuse -sa pression- est indépendante des propriétés "fines" du choc. Par ailleurs, les pertes radiatives dans le front d'évaporation qui sépare les régions coronale et nébulaire, sans être négligeables (de l'ordre de la moitié de l'énergie disponible), n'affectent pas de façon décisive l'évolution dynamique, d'autant plus que la correction qu'elles apportent reste faible au regard de l'incertitude que les données d'observation laissent quant au bilan énergétique total. On pourra conclure, suivant l'humeur, qu'on a passé trop de temps sur des détails sans incidence sur le résultat final, ou au contraire, que l'insensibilité du modèle à ces détails le rend plus sûr.

Il reste néanmoins que le modèle que nous proposons est, à notre avis, le seul qui rende compte des propriétés dynamiques essentielles des nébuleuses planétaires, tout en respectant les contraintes, en particulier énergétiques, imposées par les observations. Nous avons pu reproduire les propriétés suivantes :

a) présence d'une cavité centrale.

b) ionisation limitée par le flux, c'est à dire absorption complète des photons Ly-c pour la majorité des nébuleuses observées.

c) relation entre la masse ionisée et le rayon.

d) gradient de vitesse radiale.

Par contre, nous n'avons pas rendu compte des propriétés suivantes :

e) corrélation entre rayon total et vitesse d'expansion.

f) forme ellipsoïdale

g) existence éventuelle d'une structure à double coquille.

La corrélation entre le rayon et la vitesse d'expansion (si on admet qu'elle reflète une séquence évolutive, ce qui n'est pas sûr) indique un mouvement d'expansion accéléré. Nous aurions pu présenter un modèle dont l'expansion soit accélérée. Mais le traitement à une dimension que nous utilisons est réfractaire aux instabilités non-radiales. Or, le modèle tel que nous le proposons comprend deux interfaces où la densité croît discontinûment vers l'extérieur : le front d'évaporation et le front d'ionisation (tant qu'il est de type D); et ces interfaces sont sujettes à des instabilités de type Rayleigh-Taylor lorsqu'elles ont un mouvement accéléré vers les densités croissantes. Nous avons préféré renoncer à présenter un modèle ayant une expansion accélérée tant que la nature des instabilités non-radiales et leur incidence sur l'expansion générale ne sont pas élucidées. Parmi les mécanismes proposés pour expliquer la forme ellisoïdale des nébuleuses planétaires, il en est un qui fait appel à un vent stellaire non isotrope émis par un noyau en rotation. Si le modèle à cavité coronale est fondamentalement correct, cette explication ne tient pas, puisque le vent stellaire, isotrope ou non, agit sur la nébuleuse par l'intermédiaire d'un volume de gaz où la pression est uniforme et isotrope.

Pour terminer, évoquons quelques voies possibles pour des recherches ultérieures. La première qui vient à l'esprit est une modélisation simultanée des propriétés dynamiques et spectroscopiques des nébuleuses

planétaires, ou plutôt d'une N.P. dotée d'un ensemble d'observations le plus complet possible. Une telle modélisation complète serait plus contraignante et plus instructive que les modélisations disjointes qui ont été faites jusqu'à présent. Par ailleurs, il serait intéressant de mener pour les fronts d'évaporation une étude de stabilité semblable à celle faite par Capriotti pour les front d'ionisation. Concernant la forme ellisoïdale, deux types d'explications semblent possibles : elle pourrait être "héritée" d'une anisotropie dans l'éjection de l'enveloppe par l'étoile parente, et il faudrait alors examiner comment cette hérédité est préservée dans les phases observées de la N.P.; ou bien l'anisotropie pourrait se développer "spontanément" comme résultat d'une instabilité non-radiale. L'existence de structures à double coquille pourrait aussi avoir deux types d'explication : historique particulier de l'éjection de l'enveloppe et du flux ionisant, ou bien interaction avec le milieu interstellaire.

Du côté des observations, les détecteurs modernes devraient permettre de reprendre les observations spectroscopiques en améliorant la résolution pour préciser la structure cinématique, et en étendant le domaine spectral vers le rouge pour accéder à des états d'ionisation jusqu'ici inobservés. Deux points semblent particulièrement dignes d'intérêt : les vitesses radiales des raies de (NeV), et les raies émises dans la région neutre, éventuellement excitées par le choc précurseur du front D. Le télescope spatial, en multipliant par dix la résolution angulaire, révèlera certainement des détails de structure inattendus. Il permettra en particulier de savoir s'il existe d'autres spécimens de la structure particulière de la nébuleuse de l'Hélice, caractérisée par ses petits globules et leurs cônes d'ombre.

Nous n'échappons pas à la conclusion traditionnelle : bien du travail reste à faire [1].

(1) En français dans le texte.

Références

Abott, D.C. - 1978 - **Ap. J.** 225, 893

Atherton, P.D. ; Hicks, T.R. ; Reay, N.K. ; Worswick, S.P. ; Hayden Smith, W. - 1978 - **Astron. & Astroph.** 66,297

Axford, W.I. - 1961 - **Phil. Trans. R. Soc., London A** 252,301

Barlow, M.J. - 1971 - **Nature Phys. Sci.** 232,152

Beaudet, G. ; Salpeter, E.E. -1969 - **Ap. J.** 155,203

Benvenutti, P. ; Perinotto, M. -1980 - **Proc. 2nd IUE Conf., Tubingen**

Buerger, E.G. - 1973 - **Ap. J.** 180,817

Colgate, S.A. ; Hartman, C.W. - 1967 - **Physics of Fluids** 10,1288

Cowie, L.L. ; Mc Kee, C.F. - 1977 - **Ap. J** 211,135

Curtis, H.D. - 1918 - **Publ. Lick. Obs.** 13,75

Dalgarno ; Mc Cray - 1972 - **A.R.A.A.**

Davidson, R.C. ; Krall, N.A. ; Papadopoulos, K. ; Shanny, R. - 1970 - **Phys. Rev. Lett.** 24,579

Dyson, J.E. ; Falle, S.A. ; Perry, J.J. - 1979 - **Nature** 277,120

Falle, S.A.E.G. - 1975 - **Astron. & Astroph.** 43,323

Ferch, R.L. ; Salpeter, E.E. - 1975 - **Ap. J.** 202,195

Flower, D. - 1969 - **M.N.R.A.S.** 146,171

Flower, D. - 1969 - **M.N.R.A.S.** 146,243

George, D. - 1973 - **Mem. Soc. Roy. Sci., Liège 6e ser.,** 5,431

Harm, R. ; Schwarzschild, M. - 1975 - **Ap. J.** 200,324

Harman, R.J. ; Seaton, M.J. - 1966 - **M.N.R.A.S.** 132,15

Harrington, J.P. - 1973 - **Mem. Soc. Roy. Sci., Liège 6e ser.,** 5,437

Hummer, D.G. ; Seaton, M.J. - 1962 - **M.N.R.A.S.** 125,437

Hundhausen, A.J. ; Montgomery, M.D. - 1971 - **J.G.R.** 76,2236

Jordan, C - 1969 - **M.N.R.A.S.** 142,501

Kaler, J.B. - 1976 - **Ap. J.** Suppl.31,517

Kirkpatrick, R.C. - 1972 - **Ap. J.** 176,381

Krugel, F. ; Tenorio Tagle, G. - 1978 - **Astron. & Astrophys.** 70,51

Kwok, S. ; Purton, C.R. ; Fitzgerald, P.M. - 1978 - **Ap. J.** 219,L125

Landau, L. ; Lifchitz, E. - 1971 - **Mecanique des Fluides - Editions Mir, Moscou** 415

Lasker, B.M. - 1966 - **Ap. J.** 143,700

Maciel, W.J. ; Pottasch, S.R. - 1980 - **Astron. & Astrophys.** 88,1

Mathews, W.G. - 1965 - **Ap. J.** 142,1120

Mathews, W.G. - 1966a - **Ap. J.** 143,173

Mathews, W.G. - 1966b - **Ap. J.** 144,206

Montgomery, M.D. ; Abridge, J.R. ; Bame, S.J. - 1970 - J. Geop. Res. 75,1217

Natta, A. ; Pottasch, S.R. ; Preite-Martinez, A. -1980 - Astron. & Astrophy. 84,284

Nussbaumer, H. - 1980 - 2nd IUE Conf., Tubingen

O'Dell, C.R. - 1966 - Ap. J. 143,168

Osterbrock, D.E. ; Miller, J.S. ; Weedman, D.W. - 1966 - Ap. J. 145,698

Papadopoulos, K. ; Davidson, R.C. ; Dawson, J.M. ; Haber, I. ; Hammer,D.A. ; Krall, N.A. ; Shanny, R. - 1971 - Phys. Fluids 14,849

Pecker, J.C. - 1971 - C.R.Acad. Sci. 272,69

Philips, J.P. ; Reay, N.K. ; Worswick, S.P. - 1977 - Astron. & Astrophy. 61,695

Philips, J.P. ; Reay, N.K. ; Worswick, S.P. - 1979 - Ap. J. Lett.20,75

Pottasch, S.R. ; Wesselius, P.R. ; Wu, C.C. ; Fieten, H. ; Van Duinen, R.J. - 1978 - Astron. & Astrophys. 62,95

Pottasch, S.R. - 1980 - Astron. & Astrophys. 89,336

Reay, N.K. ; Worswick, S.P. - 1977 - M.N.R.A.S. 179,317

Sedov, L.I. - 1959 - Similarity and dimensional methods in mechanics, Academic Press, New-York

Shafranov, V.D. - 1957 - J.E.T.P. 5,1183

Spitzer, L. - 1962 - Physics of fully ionzed gases , New-York, Interscience

Spitzer, L. - 1978 - Physical Processes in the Interstellar Medium, J. Wiley, New-York

Tenorio Tagle, G. - 1976 - Astron. & Astrophys. 53,411

Terzian, Y. - 1974 - Ap. J. 193,93

Truran, J. - 1974 - Private communication

Weaver, R. ; Mc Cray, R. ; Castor, J. ; Shapiro, P. ; Moore, R. - 1977 - Ap. J. 218,377

Weedman, D.W. - 1968 - Ap. J. 153,49

Wilson, O.C. - 1948 - Ap. J. 108,201

Wilson, O.C. - 1949 - Ap. J. 111,279

Wilson, O.C. - 1952 - Ap. J. 117,264

Wright, W.H. - 1918 - Publ. Lick. Obs. 13,199

Zanstra, H. - 1931 - Publ. Dom. Astr. Obs. 4,209

Zeldovich, Ya.B. ; Raizer, Yu.P. - 1967 - Physics of shock waves and high temperature phenomena. New-York, Academic Press

ANNEXE

AUTRES TRAVAUX

Astron. & Astrophys. 45, 141 – 143 (1975)

Thermodynamics of Convective Urca Cores

B. Lazareff

Radioastronomie, Observatoire de Meudon

Received July 2, 1975

Summary. The evolution of degenerate carbon cores has recently been computed taking into account convection-driven Urca processes. The treatments used contain the assumption that only the energy balance needs to be taken into account. The aim of the present paper is to show that ignoring the entropy budget leads to an overestimate of the stabilizing properties of convective Urca processes.

Key words: Urca process — supernovae

1. Introduction

Paczyński (1972) pointed out the importance of convective Urca processes as an energy sink to stabilize carbon burning in the degenerate cores of evolved 4–8 $M_\odot$ stars. However, Paczyński (1973) and Bruenn (1973) have shown that the convective Urca processes are a source of entropy outside the immediate vicinity of the Urca shell ($|E_F - E_m| \lesssim kT$: where E_m is the electron capture threshold and E_F the Fermi energy). Recently, Couch and Arnett (1974, 1975) and Ergma and Paczyński (1974) have computed the evolution of degenerate stellar cores after carbon ignition. These computations were performed by requiring that at each time step the central temperature (and the extent of the convective core) be such that the neutrino luminosity equals the nuclear energy generation rate. The evolution of the core is then governed by the increase of its total mass and of the electronic molecular weight. The following assumption is implicit in these treatments: given a degenerate carbon core of fixed mass and composition, there exists a stationary convective Urca model for any (not too large) energy source. The aim of the present paper is to show that this assumption is not justified.

2. Notation

It is assumed here that there exists in the degenerate core a stationary nuclear energy source $\dot{\varepsilon}_N$, that only one Urca pair (A, Z)–$(A, Z+1)$ is active, and that, with the exception of the Urca pair, the gas has a fixed composition and is in thermodynamic equilibrium. The thermodynamic state of the gas can then be described by the following parameters (per nucleon):

v: specific volume

s: specific entropy

n: number of $(A, Z+1)$ nuclei; $dn = dn$ (electrons)

e: internal energy

h: enthalpy.

Local electrical neutrality is assumed, so that the number of electrons is coupled to the respective numbers of nuclei of the Urca pair. The thermodynamic potential associated with n is therefore:

$$\mu = \left(\frac{\partial e}{\partial n}\right)_{s,v} \approx E_F - E_m .$$

It is also assumed that within the convective region:

$$\frac{dn}{dr} > 0 , \tag{1}$$

$$\frac{dT}{dr} < 0 \tag{2}$$

The notation ∂ is used for thermodynamic derivatives, and d for space and time derivatives. The rates associated with Urca processes are denoted by the index β.

An ad absurdio proof of the impossibility of a stationary Urca core is presented in the next two sections. It is always permissible in such a proof to use results derived from the supposedly true starting assumption (that a stationary Urca core exists).

3. Convective Instability and Energy Transport

The following expressions are used, with the usual factors of 2 incorporated into the formal parameters l (mixing length) and w (velocity of the convective elements). F is the flux of energy (internal energy and

pressure work)

$$F = \frac{wl}{v}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_{s,n}\frac{dp}{dr} - \frac{dh}{dr}\right], \tag{3}$$

$$w^2 = -\frac{GM(r)}{r^2}\frac{l^2}{v}\left[\frac{dv}{dr} - \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{s,n}\frac{dp}{dr}\right]. \tag{4}$$

Using thermodynamic identities, these expressions can be transformed into:

$$F = -\frac{wl}{v}\left[\mu\frac{dn}{dr} + T\frac{ds}{dr}\right] \tag{5}$$

$$w^2 = -\frac{GM(r)}{r^2}\frac{l^2}{v}\left[\frac{ds}{dr} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{s,n}\frac{dn}{dr}\right]\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{s,n}. \tag{6}$$

Notice that: $\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{s,n} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial v}\right)_{s,n}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{s,n} > 0$ so that $\frac{ds}{dr} < 0$ follows from assumption (1) and $w^2 > 0$.

One can then relate the changes of internal energy and concentration of Urca nuclei to their local rate of production and to their convective transport

$$\frac{dn}{dt} = \left(\frac{dn}{dt}\right)_\beta + \frac{v}{r^2}\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2 wl}{v}\frac{dn}{dr}\right], \tag{7}$$

$$\frac{de}{dt} = \dot{\varepsilon}_N + \dot{\varepsilon}_\beta - \frac{v}{r^2}\frac{d}{dr}[r^2 F]. \tag{8}$$

At this point, it is important to note that a similar expression cannot be written for the entropy. The time derivative of the entropy must be derived from:

$$T\frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} - \mu\frac{dn}{dt} + p\frac{dv}{dt}. \tag{9}$$

All equations refer to the gas contained between fixed mass boundaries. For a stationary model, this is equivalent to fixed radius boundaries. Therefore, the last term of (9) can be taken to be zero. Pressure work on convective elements is taken into account in the flux Eq. (3) which contains derivatives of the enthalpy rather than of the internal energy.

4. Rate of Growth of the Entropy

The time derivative of the entropy S of the whole convective zone can be expressed as:

$$\frac{1}{4\pi}\frac{dS}{dt} = \int_0^{r_m}\frac{r^2 dr}{v}\frac{ds}{dt}$$

$$= \int_0^{r_m}\frac{r^2 dr}{vT}\left[\dot{\varepsilon}_\beta - \mu\left(\frac{dn}{dt}\right)_\beta\right] + \int_0^{r_m}\frac{r^2 dr}{vT}\dot{\varepsilon}_N$$

$$+ \int_0^{r_m}\frac{dr}{T}\left[-\mu\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2 wl}{v}\frac{dn}{dr}\right) - \frac{d}{dr}(r^2 F)\right]. \tag{10}$$

The integrand of the first term is positive except near the Urca shell. Bruenn (1973) has shown that the integral is positive unless the central temperature is so high that carbon detonation cannot be avoided. The second term is positive. Let A be the third term.

$$A = \int\frac{dr}{T}\left\{-\mu\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2 wl}{v}\frac{dn}{dr}\right] + \frac{d}{dr}\left[\frac{r^2 wl}{v}\left(T\frac{ds}{dr} + \mu\frac{dn}{dr}\right)\right]\right\}$$

$$= \int\frac{r^2 dr}{T}\frac{wl}{v}\left(\frac{dn}{dr}\cdot\frac{d\mu}{dr} + \frac{ds}{dr}\cdot\frac{dT}{dr}\right) + \int dr\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2 wl}{v}\frac{ds}{dr}\right). \tag{11}$$

The last term in (11) integrates to zero. A is just the difference between the correct expression for the time derivative of the entropy and what would be obtained if one writes down an expression similar to (7) for the entropy. It therefore represents the extra entropy production associated with the mixing of convective elements of different composition and temperature. To complete the proof, it is necessary to show that it is positive. We transform the expression for A using:

$$\frac{d\mu}{dr} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{s,n}\frac{dT}{dr} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial s}\right)_{T,n}\frac{ds}{dr} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial n}\right)_{T,s}\frac{dn}{dr}.$$

Recall that in the convective zone:

$$w^2 > 0; \quad \frac{ds}{dr} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{s,n}\frac{dn}{dr} < 0.$$

Using (13) and (14), the inequality $A > 0$ is implied by:

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial s}\right)_{T,n}\frac{ds}{dr} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial n}\right)_{T,s}\frac{dn}{dr} > 0.$$

It remains to show that the above two thermodynamic derivatives are respectively negative and positive. This is done by transforming them into products of derivatives whose sign can either be deduced from first principles or can be ascertained for any reasonable equation of state.

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial s}\right)_{T,n} = -\left(\frac{\partial \mu}{\partial v}\right)_{T,n}\left(\frac{dT}{\partial s}\right)_{v,n}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{s,n} < 0$$

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial n}\right)_{T,s} = -\left(\frac{\partial \mu}{\partial s}\right)_{T,n}\left(\frac{\partial n}{\partial s}\right)^{-1}_{\mu,T}.$$

The sign of the last term is found as follows:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial s}\right)_{\mu,T} = \frac{\partial(n,\mu,T)}{\partial(s,\mu,T)} = \frac{\partial(n,\mu,T)}{\partial(n,v,T)}\cdot\frac{\partial(n,v,T)}{\partial(s,\mu,T)}$$

$$= \left(\frac{\partial \mu}{\partial v}\right)_{n,T}\left[\frac{\partial(s,\mu,T)}{\partial(n,v,T)}\right]^{-1}$$

$$\frac{\partial(s,\mu,T)}{\partial(n,v,T)} = \left(\frac{\partial s}{\partial n}\right)_{v,T}\left(\frac{\partial \mu}{\partial v}\right)_{n,T} - \left(\frac{\partial \mu}{\partial n}\right)_{v,T}\cdot\left(\frac{ds}{\partial v}\right)_{n,T} < 0.$$

The signs of the last four derivatives are respectively +, −, +, +.

5. Concluding Remarks

From a purely computational point of view, the present result is tied to:

– The condition for convective instability, which is used to show that the "mixing entropy" term A is positive.

– The absence of any significant mechanism to take over energy transport at the boundary of the convective zone, thus contributing a sink term in the time derivative of the entropy.

However, the impossibility of a stationary convective Urca zone can perhaps be better understood from the following considerations. For Urca processes to operate in a zone much larger than the Urca shell, convective mixing is necessary. The convective zone can be considered as a thermodynamic engine that works between a hot source (exothermic nuclear reactions) and a cold source. If the Urca reactions operate out of equilibrium, they are a source of entropy, and cannot constitute the cold source. The only cold source available is the gas at the boundary of the convective zone. If this gas has no energy transport mechanism available, it must heat up: the convective zone expands.

Acknowledgements. It is a pleasure to thank J. Audouze, J. P. Chièze and L. Vigroux for clarifying discussions.

References

Bruenn, S. W 1973, *Astrophys. J.* **183**, L125
Couch, R. G., Arnett, W. D. 1974, *Astrophys. J.* **194**, 537
Couch, R. G., Arnett, W. D. 1975, *Astrophys. J.* **196**, 791
Ergma, E., Paczyński, B. 1974, *Acta Astron.* **24**, 1
Paczyński, B. 1972, *Astrophys. Letters* **11**, 53
Paczyński, B. 1973, *Astrophys. Letters* **15**, 147

B. Lazareff
Observatoire de Meudon
Département de Radioastronomie
F-92190 Meudon, France

Astron. & Astrophys. 48, 167 – 169 (1976)

Letter to the Editor

A Bright Source of Carbon Recombination Line in the rho Ophiuchi Complex

D. A. Cesarsky, P. J. Encrenaz, Edith G. Falgarone,
B. Lazareff, R. Lauqué, R. Lucas and L. Weliachew
Departement de Radioastronomie, Observatoire de Meudon

Received October 26, 1975

Summary. We present radio observations of a bright carbon 166 α recombination line, $T_A = 0.20$ K, arising in a small region, $\theta_s = 4'$, of the dark cloud near the star ϱ-Ophiuchi. A weaker line, $T_A = 0.040$ K, which apparently arises in a more extended region, is identified with the recombination line emission of sulphur.

Key words: recombination lines – dark clouds

I. Introduction

The recent discovery of carbon recombination line emission in the molecular cloud located near the star ϱ-Oph (Brown and Knapp, 1974) prompted us to observe the same region with better angular resolution. We were motivated also by the claim of Vrba *et al.* (1975) that a large number of early type stars are embedded in that region. Indeed, given the large densities prevailing in ϱ-Oph, $n_{H_2} > 10^3 - 10^4$ cm^{-3}, detectable amounts of C II may surround the brightest members of the star cluster. Finally, we were interested in investigating whether there is a relation between the carbon line emission and the molecular peak (Encrenaz, 1974).

II. Observations

The observations have been carried out with the transit radiotelescope at Nançay in February, April and August 1975. Total power detection was used instead of the usual correlation mode. We thus obtained a better signal-to-noise ratio by having eliminated the response of the system to phase variations. We switched in frequency by an amount equivalent to one half of the 64 × 6 kHz channel bank so that the line emission appeared twice in each integration. The overall system noise was 120 K and the calibration was done using a noise diode whose power was regularly checked against a continuum radio source. The beam shape, which is elongated in declination, measures 3.9′ × 22′ at the declination of ϱ-Oph and at the frequency of 1425 MHz. The overall sensitivity is equal to 1.2 K/Jy.[1]

[1] 1 Jy = 10^{-26} W m^{-2} Hz^{-1}.

Table 1 presents the observed carbon line parameters at different locations in the cloud; Fig. 1 shows the integration of all data obtained at ($\alpha_0 = 16^h\,23^m\,35^s$, $\delta_0 = -24°\,19'$), ($\alpha_0 - 9^s$, δ_0) and ($\alpha_0 + 9^s$, δ_0). A line of antenna temperature 0.040 ± 0.009 K is apparent at -8.5 km/s from the carbon line. If the line originates in a region that has the same radial velocity as the ionized carbon region, the emission is due to a species of atomic mass 32 ± 3. We thus confirm the detection of Chaisson (1975) and his suggestion that the emission is due to recombination onto ^{32}S. The sulphur line is apparent on each of the three spectra where the carbon line was detected. Its intensity seems to remain constant, suggesting that the ionized sulphur is spatially more extended that the ionized carbon. The ratio of carbon to sulphur line intensity is 5 ± 2. Chaisson (1975) who observed with an antenna having a larger beam (a circular beam of 18′) finds the ratio to be 3 ± 1. Although the difference is marginal, it is consistent with a larger sulphur emitting region.

A gaussian fit to the line intensities shown in Table 1 yields a line peak intensity of 0.33 ± 0.08 K km/s, and a source of width $\Delta\alpha = 4'(+2', -1')$ centered at $16^h\,23^m\,40^s$. The region of strongest emission then does not coincide with the position of the molecular peak (Encrenaz, 1974) or with the position of maximum emission of $^{12}C^{18}O$. (Encrenaz *et al.*, 1975). Finally, the integrated line flux is equal to 2.0 ± 0.5 Jy kHz.

III. Discussion

Previous observations of ϱ-Oph at the same frequency gave a lower antenna temperature than reported here;

Table 1. Observed carbon line parameters

α (1950) h m s	δ (1950)	T_A (peak) ± 2σ or 3σ limit	V_{LSR} km s^{-1}	ΔV_L [a]) km s^{-1}
16 22 33	−24 19	<.12	—	—
16 23 15	−24 19	.09		
16 23 26	−24 19	.08±.03	3.1±0.5	2.0±0.5
16 23 35	−24 19	.18±.03	3.0±0.5	1.8±0.5
16 23 44	−24 19	.20±.03	3.0±0.5	1.5±0.5
16 23 55	−24 19	<.12		

[a]) Not corrected for instrumental broadening.

Brown *et al.* (1974) find a maximum value of 0.058 K. However, both sets of observations are in agreement: the measurements of Brown *et al.* (1974) imply a total flux of 1.4±0.6 Jy kHz, in accordance with the present determination. Their lower antenna temperature is simply due to the fact that the source is smaller than the 21′ beam used for their observations. The source diameter can be deduced from the comparison of antenna temperatures; we find $\theta_s \simeq 3'$.

The line velocity, $v_{LSR} = 3.0 \pm 0.5$ km/s coincides with the radial velocities of molecular species detected in the same region. The line width is also comparable to that of the molecular lines, suggesting that turbulence is the main factor affecting the line width. The brigthness temperature of the recombination line is given by the following set of equations (Brown *et al.*, 1974):

$$T_L \Delta v = b_n \tau_L^* \Delta v T_e (1 - \beta T_{BG}/T_e)$$
$$\tau_L^* \Delta v = 2.2 \times 10^3 \, EM \, T_e^{-2.5} \exp\{1.58 \times 10^5/n^2 T_e\} \qquad (1)$$
$$\beta = 1 - \frac{kT_e}{h\nu} \frac{d \ln b_n}{dn}.$$

Assuming a spherical model source of constant carbon density $n_{C\,II}$ and electron temperature, we integrate Eq. (1) over solid angle to obtain the total flux:

$$S_L \Delta v = 0.78 \, T_e^{-1.5} D \theta_s^3 \cdot n_e n_{C\,II} \frac{v^2}{c^2} b_n (1 - \beta T_{BG}/T_e) \exp\{1.58 \times 10^5/n^2 T_e\}. \qquad (2)$$

Adopting $D = 160$ pc (Whittet, 1974), $T_{BG} = 2.7$ K and $n_{C\,II} = n_e$, the observed value of $S_L \Delta v/\theta_s^3$ is determined by an appropriate choice of n_e and T_e. Departure coefficients b_n (T_e, n_e) have been published by Hoang-Binh and Walmsley (1974) for $T_e = 10$ K and $T_e = 100$ K; the corresponding values of n_e, Eq. (2), are 2 ± 0.3 cm^{-3} and 10 ± 3 cm^{-3} respectively. An upper limit for T_e is obtained from the Doppler width of the carbon line, $T_e < 600$ K, so that $n_e < 40$ cm^{-3}. Temperatures derived from CO observations are of the order of 20 K (Encrenaz *et al.*, 1975) and we adopt this temperature as a lower limit in the ionized carbon region. The corresponding electron density is 3 ± 0.4 cm^{-3}, implying a minimum value of the emission measure equal to 1.6 pc cm^{-6}. The ionizing flux is then larger than 8×10^4 photons cm^{-2} s^{-1} ster^{-1} Å^{-1} (Cesarsky and Lépine, 1975) well in excess of the interstellar value, 5×10^3, determined by Habing (1968). We postulate one or more local ionizing sources, as suggested also by the small size of the line source. The source(s) has to provide at least 10^{43} photons s^{-1} in the wavelength range 912 to 1100 Å. The actual emission rate may be considerably higher since a) the ionizing source may not be inside the C-emitting region, and b) a fraction of the photons will be absorbed by dust rather than by carbon. Adopting $\tau_D = 10^{-21}$ n L for the dust absorption in the ultraviolet (York *et al.*, 1973; Jenkins and Savage, 1974) implies that $\tau_D \simeq 1$ over the radius of the C II region.

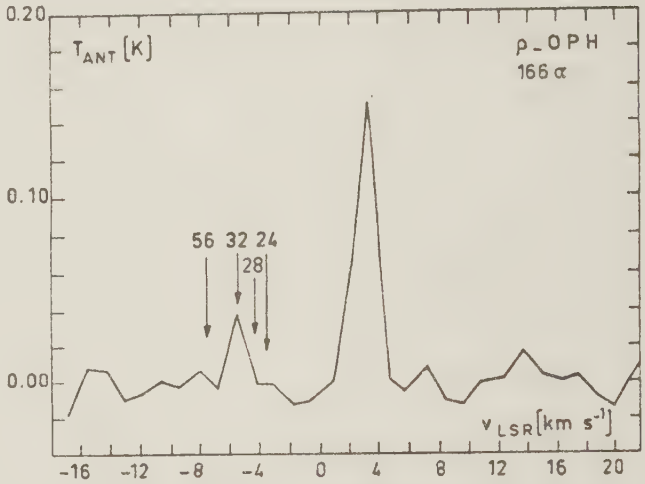


Fig. 1. Integration of all data at the three positions ($\alpha_0 = 16^h\ 23^m\ 35^s$, $\delta_0 = -24\ 19'$), ($\alpha_0 - 9^s$, δ_0) and ($\alpha_0 + 9^s$, δ_0). The velocity scale refers to the C 166 α recombination line. The velocity of the corresponding lines of elements of different masses is indicated by arrows

Dust is also important for understanding the relative intensity of the carbon and sulphur lines. In an ionization bounded region, the line flux ratio is equal to the ratio of the number of photons absorbed by the neutral fraction of each species. If there is no dust, all the photons are absorbed by the atoms and the line ratio is given by the spectral distribution of the ionizing source. The effect of dust is to absorb more drastically the photons that ionize the less abundant species and hence the line ratio becomes also a function of the number abundance ratio. It is clear that when dust is present there is no simple relationship between line intensities and abun-

dances. The observations suggest that the sulphur emission is more extended than the carbon emission; therefore we expect that the abundance ratio in the gaseous phase, [C]/[S], will be larger than the line intensity ratio.

It is of interest to remark that emission from ^{28}Si has not been detected, see Fig. 1 and Chaisson (1975). The line should be detectable because a) the cosmic abundance of Si exceeds that of S by a factor 2 (Allen, 1973) and b) Si is ionized by photons in the energy range 8.15 to 10.36 eV, whereas S is ionized in the range 10.36 to 11.26 eV, so that the number of photons capable of ionizing Si should exceed by a factor ~ 2.5 the number of S-ionizing photons. (See also Fig. 3 of Walmsley, 1973). We suggest that Si is depleted with respect to S by a factor $\gtrsim 5$, a result also found independently by Gomez Gonzalez and Lequeux (1975).

IV. Conclusion

We have observed the ϱ-Oph dark cloud with a higher angular resolution than previous observations. The C 166α line temperature was measured to be as high as 0.20 K, a factor ~ 3 stronger than observed by Brown *et al.* (1974) with a smaller telescope. We confirm the detection of Chaisson (1975) of a sulphur recombination line and we present some evidence indicating that the ionized sulphur is more extended than the ionized carbon. A mapping of the carbon emitting source indicates a diameter of 4′, corresponding to 0.2 pc at the distance of the cloud.

The photon flux necessary to ionize the carbon is at least 16 times higher than the interstellar ultraviolet flux and clearly a local source(s) of ionizing radiation is necessary.

The failure to detect the emission from Si is interpreted as an indication that the abundance ratio [Si]/[S] in the gaseous phase is a factor $\gtrsim 5$ smaller than the cosmic ratio.

Acknowledgements. We express our thanks to Dr. J. Gomez-Gonzalez for assistance in the observations and to the technical staff of the radiostation of Nançay.

References

Allen, C.W. 1973, Astrophysical Quantities (3rd. edition), The Athlione Press, London
Brown, R.L., Knapp, G.R. 1974, *Astrophys. J.* **189**, 253
Brown, R.L., Gammon, R.H., Knapp, G.R., Balick, B. 1974, *Astrophys. J.* **192**, 607
Cesarsky, D.A., Lépine, J. 1975, (in preparation)
Chaisson, E.J. 1975, *Astrophys. J.* **197**, L65
Encrenaz, P.J. 1974, *Astrophys. J.* **189**, L135
Encrenaz, P.J., Falgarone, E.G., Lucas, R. 1975, *Astron. & Astrophys.*, to be published
Gomez Gonzalez, J., Lequeux, J. 1975, *Astron. & Astrophys.* **38**, 29
Habing, H. 1968, *Bull. Astron. Inst. Neth.* **19**, 421
Hoang-Binh, D., Walmsley, C.M. 1974, *Astron. & Astrophys.* **35**, 49
Jenkins, E.B., Savage, B.D. 1974, *Astrophys. J.* **187**, 243
Vrba, F.J., Strom, M.K., Strom, S.E., Grasdalen, G.L. 1975, *Astrophys. J.* **197**, 77
Walmsley, M. 1973, *Astron. & Astrophys.* **25**, 129
Whittet, D.C.B. 1974, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **168**, 371
York, D.G., Drake, J.F., Jenkins, E.B., Morton, D.C., Roberson, J.B., Spitzer, L. 1973, *Astrophys. J.* **182**, L1

D. A. Cesarsky
P. J. Encrenaz
E. G. Falgarone
B. Lazareff
R. Lauqué
R. Lucas
L. Weliachew
Département de Radioastronomie
Observatoire de Meudon
F-92190 Meudon, France

Astron. Astrophys. 70, L77—L78 (1978)

ASTRONOMY AND ASTROPHYSICS

Letter to the Editor

Detection of the ^{13}C Isotope of Formamide in the Galactic Center

B. Lazareff[1,2], R. Lucas[1,3], and P. Encrenaz[1,3]

[1] Radioastronomie, Observatoire de Meudon, F-92190 Meudon, France
[2] Institut d'Astrophysique de Paris, F-75014 Paris, France
[3] Ecole Normale Supérieure, Paris, France

Received October 13, 1978

Abstract. We have observed the $1_{11} - 1_{10}$ F = 2 - 2 line of normal and ^{13}C substituted formamide (NH_2 CHO) in the direction of Sgr B2. We find that both lines are optically thin and that the ratioof column densities is 24 ± 6 (2σ)

Key Words. Molecules, Abundances, Isotopes.

Introduction

The nucleosynthetic history of our Galaxy relies on a few isotopic ratios. Among them 12C/13C plays an important role (see for a review Audouze and Tinsley, 1976). Formamide is abundant enough to be observed in both isotopic species in the galactic center. We have carried out such a measurement at Nançay.

Observing Procedure

The observations were made with the Nançay radiotelescope in December 1977, February and May 1978. The dual polarization front end has a system temperature of 70 K at the observing frequency. The back-end was made up of two banks of 64 channels x 6 kHz each giving a velocity coverage of 150 km/s. We used frequency switching between the line and a comparison frequency 535 kHz away. The noise tube calibrations were reduced to flux units using drift scans of 3C 123. The total integration time on Sgr B2 ($\alpha_{1950} = 17^h\ 44^m\ 11^s$, $\delta_{1950} = -28°\ 22'\ 30''$ $V_{LSR} = +62$ km/s) was 14 hours.

Drs Sorensen and Stubgaard kindly communicated to us their measurements of the rotational and distorsion constants of normal and ^{13}C substituted formamide. Using the computed rotational energies and the measured frequencies of the hyperfine lines of ^{12}C formamide (Gottlieb et al, 1973), we deduced the frequency of the $1_{11} - 1_{10}$ F= 2-2 line of ^{13}C formamide :

$$\nu_{13} = 1570.825 \pm 0.030 \text{ MHz}$$

The uncertainty on the difference of the frequencies of the two isotopic species ($\nu_{13} - \nu_{12}$) is only 9 kHz.

Results and Discussion

Figure 1 shows the observed spectrum. A parabolic baseline has been substracted and the 6 kHz channels have been averaged in adjacent groups of 4, yielding a resolution of 4.6 km/s. With the same observing procedure, we have reobserved the $1_{10} - 1_{11}$ F = 2-2 transition of ^{12}C formamide. The results are summarized in table 1

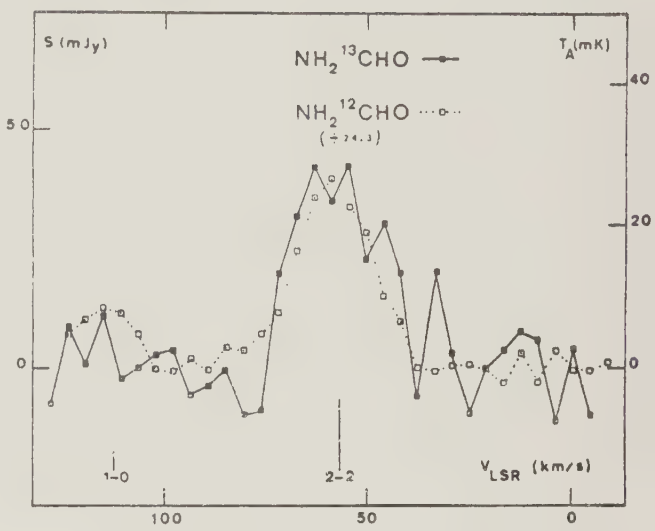


Fig.1 : Observed Spectra of the ^{12}C and ^{13}C species of Formamide. The amplitude of the ^{12}C species spectrum has been reduced by the factor 24.3 deduced from the least squares fit. Bars indicate the positions and relative LTE intensities expected for two of the hyperfine components of the ^{12}C species. The radial velocity scale applies to the F=2-2 component.

The ratio of the line intensities of substituted to normal formamide was derived from the 4-channel averages (s_i and n_i, respectively by determining the value of α which minimizes the sum of the squares of the residuals

$$r_i = s_i - \alpha n_i$$

ν_{LAB} MHz	TA mK	S mJy/lobe
1539.851	660 ± 35	980 ± 50
1570.825	28 ± 7	42 ± 10

Table 1. Peak line intensities for the two formamide isotopes.

Send offprint requests to: B. Lazareff

Transition	ν (GHz)	10 K	20 K	40 K	50 K
$1_{11} - 0_{00}$	82.5	3.3(-17)	6.4(-18)	1.2(-18)	2.2(-19)
$1_{10} - 1_{01}$	62.8	3.6(-17)	7.2(-18)	1.4(-18)	2.5(-19)
$1_{11} - 2_{02}$	18.9	3.3(-18)	7.1(-19)	1.3(-19)	2.6(-20)
$2_{12} - 1_{11}$	40.8	3.3(-16)	7.4(-17)	1.5(-17)	2.9(-18)
$2_{11} - 1_{10}$	43.9	3.5(-16)	8.0(-17)	1.6(-17)	3.0(-18)
$4_{04} - 3_{03}$	84.5	1.3(-15)	3.5(-16)	7.6(-17)	1.5(-17)

Table 2. LTE optical depth (per unit column density) of various millimetre lines at four values of the temperature.

An unbiased estimate of the error on α is given by:

$$\sigma_\alpha^2 = \Sigma r_i^2 / (m-1) \Sigma n_i^2$$

where m is number of independant samples. The more familiar inverse ratio of normal to substituted formamide is given :

$$R = 24 \pm 6 \quad (2\sigma)$$

We now want to assess whether this ratio of line intensities reflects the ratio of column densities. We assume that the observed lines arise from the amplification of the background continuum by the inverted K-doublet, and that the inversion of the doublet is caused by the competition between collisional excitation and radiative decay.
The radiative and collisional transition probabilities should not differ significantly between the ^{12}C and ^{13}C isotopic species : therefore the relative populations of the various levels shall be the same for both isotopes (and the inversion mechanism equally efficient) if all the important millimetre lines are optically thin. In particular, it is important that the optical depth of the $1_{10} - 1_{01}$ (ν = 62.8 GHz) and $1_{11} - 0_{00}$ (ν = 82.5 GHz) lines be small.
We have computed the LTE populations of all formamide levels with $J \leq 25$ at four temperatures and derived the optical depth (for 1 At cm^{-2} column density) of several millimetre line of interest. The results appear in table 2. From an inspection of these results, and recalling that Zuckerman et al (1972) obtained an upper limit $T_A \leq 0.7$ K for the $4_{04} - 3_{03}$ transitions, one can conclude that all the millimetre lines involved in the pumping mechanism are optically thin. Besides, the fact the hyperfine components of ^{12}C formamide are observed in their LTE ratios (Gottlieb et al 1973) shows that the $1_{10} - 1_{11}$ maser operates in the linear regime. Therefore we conclude that both isotopic species are similarly excited, and that the observed ratio of line intensities represents the ratio of column densities of the two isotopes formamide.
In order to relate the molecular and isotopic abundance ratios, we have to consider the possibility of fractionation. Watson et al (1976) have called the attention to the possible role of the exchange reaction between $^{13}C^+$ and ^{12}CO. Observationally, the case for fractionation among carbon isotopes is not clear. Churchwell et al (1977) have obtained observational evidence for fractionation among the ^{13}C substitutions of cyanoacetylene (HC_3N) in Sgr B2. However, Wannier and Linke (1978), observing higer rotational transitions, find no evidence for fractionation in the same molecule.
It is interesting to note that, the present result, together with the measurement of Wannier and Like, provide the first molecular isotopic ratios $^{12}C/^{13}C$ in Sgr B2 which are free from excitation or optical depth corrections. We cannot, however, exclude the possibility that the carbon atom of formamide and the three carbon atoms of cyanoacetylene all share a common fractionation factor relative to the overall $^{12}C/^{13}C$ isotopic ratio.

Conclusion

We have detected the ^{13}C isotope of formamide in the Sgr B2 molecular cloud. We have determined the ratio of the column densities of the ^{12}C and ^{13}C isotopes to be 24 ± 6 (2σ) in this molecule. This value agrees well with the values obtained HC_3N in Sag B2.

Acknowledgements

It is a pleasure to thank Drs Sorensen and Stubgaard, (University of Copenhagen) for communicating to us the results of their laboratory measurements and Drs Destombes and Marlière (University of Lille) for invaluable advice and discussion.

References

Audouze,J., and Tinsley, B.M., 1976. Ann. Rev. Astron. and Ap.
Churchwell,E., Walmsley, C.M., and Winnewisser,G., 1977. Astron. and Ap. 54, 925.
Fomalont, E.B., and Weliachew,L., 1973 Astrophys. J. 181, 781.
Gottlieb,C.A., Palmer,P., Rickard,L.J., and Zuckerman,B., 1973. Astrophys. J. 182, 699
Wannier,P.G. and Linke,R.A. 1978 Astrophys.J. in press
Watson,W.D., Anicich,W.G., and Huntress,W.T., 1976 Astrophys. J., 205 L 165
Zuckerman,B., Turner,B.E., Johnson,D.R., Palmer,P. and Morris, M. 1972, Astrophys. J. 177, 601.

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, 228:875–880, 1979 March 15
© 1979. The American Astronomical Society. All rights reserved. Printed in U.S.A.

HOT CNO–Ne CYCLE HYDROGEN BURNING: EXPLOSIVE HYDROGEN BURNING IN NOVAE*

BERNARD LAZAREFF
Institut d'Astrophysique de Paris; and Radio-Astronomie, Observatoire de Meudon
JEAN AUDOUZE
Institut d'Astrophysique de Paris; and Laboratoire René Bernas du CSNSM, Orsay
SUMNER STARRFIELD
Department of Physics, Arizona State University; and Los Alamos Scientific Laboratory
AND
JAMES W. TRURAN
Department of Astronomy, University of Illinois–Urbana
Received 1977 October 3; accepted 1978 September 28

ABSTRACT

We have studied element production occurring in novae where hydrogen burning proceeds at high temperature on short time scales. We present the results of network computations performed for temperature-density profiles extracted from hydrodynamic studies of these events. We find that, in some cases, a small change in the freeze-out profiles can induce substantial changes in the emerging abundance configurations. The influence of convective mixing and of variations in the initial composition is also found to be important. Implications for the production of the rarer CNO isotopes are discussed.

Subject headings: nucleosynthesis — stars: abundances — stars: interiors — stars: novae

I. INTRODUCTION

Hydrogen burning on CNO nuclei at temperatures above 10^8 K can produce abundance distributions which differ significantly from those realized at lower temperatures. This is directly attributable to the fact that nuclear reactions initiated by protons and α-particles can compete favorably with—indeed, dominate—positron decays under these conditions. The thermonuclear evolution occurring at constant temperature and density, for temperatures in the range $10^8 \leq T \leq 10^9$ K, has been considered by Audouze, Truran, and Zimmerman (1973), and subsequently by Cowan and Rose (1975). We note that the results of Audouze, Truran, and Zimmerman (1973) remain valid, since the thermonuclear rates in this temperature regime are not terribly sensitive to recent amendments in certain critical CNO-burning reaction parameters (Fowler, Caughlan, and Zimmerman 1975). CNO–Ne hydrogen burning occurring at high temperatures under simulated hydrodynamic conditions has been explored by Arnould and Beelen (1974) and more recently by Nørgaard (1977), who critically discussed the Cowan and Rose (1975) conclusions on the $^{18}O/^{16}O$ and $^{17}O/^{16}O$ ratios. Moreover, Arnould and Nørgaard (1978) have considered the production of ^{22}Ne in such high-temperature conditions.

High temperatures may be achieved in hydrogen-rich matter in several interesting astrophysical sites. Thermonuclear runaways in accreted hydrogen-rich envelopes of white dwarfs in binary systems are found to give rise to nova eruptions (Starrfield *et al.* 1972; Starrfield, Sparks, and Truran 1976). Supermassive star bounces, as described by Fricke (1973) and von Hoerner and Saslaw (1976), similarly provide high-temperature hydrogen-burning environments in which ^{13}C, ^{15}N, and ^{17}O may be formed (Audouze and Fricke 1973). Shock processing of the envelopes of supernovae may also allow some production of these isotopes (see, for example, Howard, Arnett, and Clayton 1971), but the consequences of such burning episodes have not yet been thoroughly explored in the context of complete and more realistic supernova envelope models.

The hydrodynamic studies referenced above have necessarily been restricted to the use of a reaction network of manageable size. The purpose of this paper is to explore in more detail the synthesis of elements in the mass range $12 \leq A \leq 25$ in novae. We assume that the computed temperature-density profiles for the ejecta, provided by the hydrodynamic studies, are realistic to the extent that they have properly represented the nuclear energy generation. We focus our attention on element production rather than on matters of energy generation and hydrodynamics. The nuclear network and some further computational considerations are reviewed in § II. Nucleosynthesis occurring in novae for realistic temperature-density profiles is presented in § III. In § IV a comparison of these results with those obtained with the use of exponential expansion profiles allows us to comment upon the reliability of parametrized studies of explosive

* Study supported in part by NSF grants AST 73-05271 at Arizona State University and AST 73-05117 and AST 76-22673 at the University of Illinois.

hydrogen-burning nucleosynthesis. Section V contains our conclusions.

II. COMPUTATIONAL METHODS

The nuclear transformations have been traced with an updated version of the reaction network described in Audouze, Truran, and Zimmerman (1973). Individual rates have been revised to include all relevant experimental determinations presented by Fowler, Caughlan, and Zimmerman (1975). It is worth noting that the rates of many critical reactions involving the proton-rich isotopes included in this reaction network represent theoretical estimates which are quite uncertain. This is the case, for instance, for the reactions $^{14}O(\alpha, p)^{17}F$, $^{15}O(\alpha, p)^{18}F$, $^{17}F(p, \gamma)^{18}Ne$, and $^{15}O(\alpha, \gamma)^{19}Ne$, which play a major role in the synthesis and destruction of nuclei of mass numbers 17, 18, and 19.

The evolution of nuclear abundances was followed by solving the linearized rate equations by standard backward differencing techniques.

In some cases, we have explored the effects of convective mixing of unprocessed matter into the active burning regions with the following assumptions: Nucleosynthesis proceeds in two zones of (normalized) masses p and $q = 1 - p$. The thermodynamic conditions are specified by T, ρ for the inner zone and $T/2$, $\rho/8$ for the outer zone. Letting X and X' be the abundances by mass of a particular constituent in the two zones and τ_c be the effective convective time scale for exchange between these zones, it is straightforward to show that the following terms must be added to the standard rate equations:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{1}{p\tau_c}(X' - X), \quad \frac{dX'}{dt} = \frac{1}{q\tau_c}(X - X').$$

We will find that the use of this simple analytic scheme allows us to simulate, in a straightforward fashion, the complex hydrodynamic behavior occurring in hydrogen-burning runaways in novae.

III. NUCLEOSYNTHESIS ACCOMPANYING NOVA ERUPTIONS

Observations suggest that the novae are close binaries, with one star filling its zero-velocity surface and losing material which flows into the region surrounding its companion, a hot white dwarf (Robinson 1976; Warner 1976). Some fraction of this matter reaches the surface of the white dwarf, forming a thin layer of hydrogen which grows as accretion continues. As this hydrogen layer becomes thicker, thermonuclear burning temperatures are approached in the inner layers at densities sufficient to ensure that the matter is degenerate. In the ensuing thermonuclear runaway, high temperatures ($T > 10^8$ K) are reached in the nuclear burning region. Theoretical hydrodynamic studies of this process have shown that a fast-nova–like outburst can occur if the hydrogen envelope is enhanced in carbon (Starrfield, Sparks, and Truran 1974, 1976). A slow-nova–like outburst results in the absence of such an enhancement (Sparks, Starrfield, and Truran 1976*a*, 1978; Prialnik, Shara, and Shaviv 1978).

One interesting outgrowth of these hydrodynamic studies has been the prediction that the ejecta should contain large concentrations of several rare light (CNO) isotopes and may, in fact, represent a galactic source of these isotopes. The high temperatures achieved during the outburst result in an extreme overproduction of certain proton-rich positron-unstable nuclei, which provide a delayed source of energy powering the outburst. It is the large abundances of these nuclei which (following decay) give rise to the interesting isotopic ratios noted above (Starrfield, Sparks, and Truran 1977). The limited reaction network utilized in these calculations, specifically designed to ensure that both the rate of energy generation and the gross nuclear evolution are appropriately handled (Starrfield *et al.* 1972), is rather too restricted to allow detailed predictions regarding nucleosynthesis. We feel confident, however, that the predicted temperature-density histories for the ejected matter provide a realistic measure of the hydrodynamic evolution. In this section, we take representative profiles from the hydrodynamic studies and trace the nuclear transformations occurring under these conditions with our expanded nuclear reaction network. In a few cases, we have also attempted to model the effects of convective mixing (since the models become convective before they reach their peak temperature) on the resulting abundance configurations. Detailed predictions regarding nucleosynthesis are therefore possible.

Four temperature-density profiles, which we find to be representative, have been chosen for detailed examination. Relevant properties of these models are summarized in Table 1; their temperature histories are illustrated in Figure 1. The significant distinguishing features are the peak temperature achieved in the

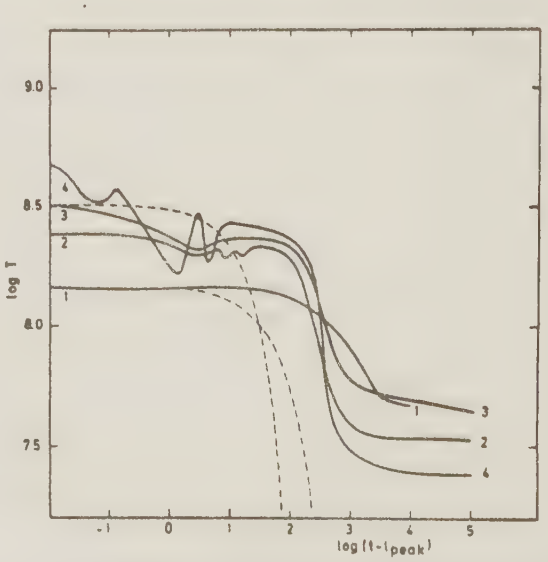


FIG. 1.—Temperature histories for the five nova profiles. *Dashed lines*, exponential cooling curves derived from profiles 1 and 3.

TABLE 1

PROPERTIES OF NOVA OUTBURST MODELS

PARAMETER	PROFILE 1	PROFILE 2	PROFILE 3	PROFILE 4
Mass ($M_\odot$)	1.0	1.0	1.0	1.0
Luminosity	1.0 (−2)	1.8 (−2)	1.8 (−2)	1.8 (−2)
Envelope mass ($M_\odot$)	1.1 (4)	1.3 (−3)	1.3 (−3)	1.4 (−3)
Initial temperature* (K)	1.2 (+7)	1.7 (+7)	1.7 (+7)	1.9 (+7)
Initial density (g cm^{-3})	2.4 (+3)	1.4 (+4)	1.4 (+4)	2.8 (+4)
^{12}C mass fraction†	0.05	0.04	0.06	0.06
^{16}O mass fraction†	...	0.04	...	0.06
Peak temperature (K)	1.4 (+8)	2.4 (+8)	3.2 (+8)	4.9 (+8)
Mass ejected ($M_\odot$)	3.5 (−5)	1.1 (−4)	1.2 (−5)	1.0 (−4)

* At the base of the envelope. † Averaged over the envelope.

evolution and the freezing time scale following the outburst. Our choices are obviously intended to be exemplary rather than exhaustive, since we may expect that the temperature and density variations with time accompanying the outburst are dependent upon a variety of model parameters, including the mass of the white dwarf and its luminosity, the rate of mass accretion, the hydrogen envelope mass, and the degree of carbon enrichment of the envelope. Calculated enhancements of the abundances of rare CNO isotopes for these various profiles are presented in Table 2.

a) Characteristics of Nova Models from Which Profiles Were Extracted

Profile 1 ($T_{max} = 1.4 \times 10^8$ K) was chosen from a survey of nova models with envelope masses of $10^{-4}\ M_\odot$ (Starrfield, Truran, and Sparks 1978). The temperature and density at the composition interface (see Table 1) are somewhat lower than for models with envelope masses of $10^{-3}\ M_\odot$ and the degree of degeneracy is somewhat less. CNO burning in this lower-temperature regime is nevertheless "hot"; the ^{13}N positron decay is bypassed by $^{13}N(p, \gamma)^{14}O$, resulting in a large concentration of ^{14}O at the point of maximum temperature.

Profile 2 ($T_{max} = 2.4 \times 10^8$ K) results from a thermonuclear runaway on a 1.0 $M_\odot$ white dwarf with a $10^{-3}\ M_\odot$ envelope. Essentially equivalent to "model 9" reported by Starrfield, Sparks, and Truran (1974), the detailed evolution will be presented in another paper (Starrfield, Truran, and Sparks 1978). The major differences in the characteristics of profiles 1 and 2 arise because the envelope of the latter model extends to a depth at which the matter is both hotter and denser.

Profile 3 ($T_{max} = 3.2 \times 10^8$ K) is taken from a 1.0 $M_\odot$ model of the same envelope mass, $10^{-3}\ M_\odot$, but with the envelope assumed to be further enriched in carbon (Starrfield, Truran, and Sparks 1978). For this case, the carbon abundance in the deepest hydrogen-rich shell has been increased to 30% by mass. This results in a peak temperature nearly 6×10^7 K higher than was realized for profile 2.

Profile 4 ($T_{max} = 4.9 \times 10^8$ K) is taken from an unpublished model. High concentrations of carbon, nitrogen, and oxygen were assumed. The hydrogen envelope is slightly more massive, and hence the matter at the composition interface between the core and the envelope was more degenerate. The combination of increased abundance and increased degeneracy explains the much higher peak temperature achieved on this profile compared with previous cases.

TABLE 2

ABUNDANCE ENHANCEMENTS ACHIEVED FOR NOVA PROFILES

ISOTOPE	PROFILE 1		PROFILE 2		PROFILE 3		PROFILE 4	
	a	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*
^{12}C	25	30	9	5	11	7	8	3
^{13}C	1100	3500	200	290	300	550	360	600
^{14}N	350	240	20	10	25	15	37	36
^{15}N	43	90	4500	1100	12	870	7800	3500
^{16}O	...	...	...	...	...	...	...	3
^{17}O	90	45	2200	1700	360	970	1500	3000
^{18}O	...	...	...	...	...	...	...	...
^{19}F	...	...	...	...	...	...	...	...
^{20}Ne	...	...	...	...	...	...	...	...
^{21}Ne	1.1	1.1	...	16	100	25	13	28
^{22}Ne	...	...	2	...	5	...	10	2

a. One-zone processing.

b. With convective mixing.

b) Nucleosynthesis

We now survey important features of the thermonuclear evolution for each of the chosen profiles.

Profile 1.—^{13}C and ^{14}N are overproduced by significant factors in this case (see Table 2), compared to ^{15}N and ^{17}O. The low concentration of ^{17}O is easily understandable: a temperature of 1.5×10^8 K is not sufficient to allow significant burning of the ^{16}O present in the matter to ^{17}F during the ~ 100 s surrounding peak temperature. The absence of ^{15}N results from a more complicated behavior. Initial concentrations of ^{12}C and ^{14}N are processed to ^{14}O and ^{15}O, respectively, around peak temperature. The rate of decline from peak temperature is slow enough to allow substantial modifications to occur, following ^{14}O and ^{15}O decays, by the reactions

$$^{14}\mathrm{O}(e^+\nu)^{14}\mathrm{N}(p,\gamma)^{15}\mathrm{O}(e^+\nu)^{15}\mathrm{N}(p,\alpha)^{12}\mathrm{C}(p,\gamma)^{13}\mathrm{N}\,.$$

This can proceed because the $^{15}\mathrm{N}(p,\alpha)^{12}\mathrm{C}$ reaction rate remains high 1000 s following peak temperature. We conclude that outbursts involving white dwarfs of small envelope mass, giving rise to lower peak temperatures, may produce significant quantities of ^{13}C.

Profiles 2, 3, and 4.—These three profiles, for which, at the peak temperatures, all charged particle reactions in the CNO cycles proceed more rapidly than the intervening positron decays, will be described together. In the approach to peak temperature, the initial ^{12}C abundance is shared by ^{14}O and ^{15}O in amounts roughly proportional to their positron-decay lifetimes; similarly, any initial ^{16}O is transformed to ^{17}F. The final abundances of ^{15}N and ^{17}O formed are, however, sensitive to the details of the expansion profile. Following ^{15}O and ^{17}F decay, their products (^{15}N and ^{17}O) can be destroyed by (p,α) reactions. Since this can occur even at somewhat lower temperatures, the survival of masses 15 and 17 demands that the temperature fall rapidly on a time scale of the order of the positron-decay lifetimes of ^{15}O and ^{17}F. As seen from Figure 1, profiles 2 and 4 fall off rapidly in the required manner; hence the enormous enhancements of ^{15}N and ^{17}O as given in Table 2. The less rapid temperature decline experienced for profile 3 ensures that, following decay, the $^{15}\mathrm{N}(p,\alpha)^{12}\mathrm{C}$ and $^{17}\mathrm{O}(p,\alpha)^{14}\mathrm{N}$ reactions will rapidly deplete ^{15}N and ^{17}O. This is particularly noteworthy for ^{15}N, for which we have used the high rate provided in a corrigendum and addendum to Fowler, Caughlan, and Zimmerman (1975).

It is interesting to note that, although the rate of the $^{17}\mathrm{O}(p,\alpha)^{14}\mathrm{N}$ reaction is uncertain by a factor ~ 100 in the vicinity of 1.5×10^8 K (Rolfs and Rodney 1974), this does not influence the final ^{17}O abundance by the same factor. The situation may be understood as follows: at peak temperature, all the ^{16}O nuclei are converted to ^{17}F. Let t_1 be the time past peak temperature at which $^{17}\mathrm{O}(p,\alpha)^{14}\mathrm{N}$ becomes slower than $^{17}\mathrm{F}(e^+\nu)^{17}\mathrm{O}$. Roughly speaking, only those ^{17}F nuclei that decay after t_1 will remain as ^{17}O. If the rate of $^{17}\mathrm{O}(p,\alpha)^{14}\mathrm{N}$ is multiplied by 100, t_1 is increased by some Δt which is small because $dr/dt = (dR/dt) \times (dT/dt)$ is large. The final concentration of ^{17}O is only modified by a factor $\exp(-\lambda_\beta \Delta t) \approx 0.25$.

Several additional features are evident from Table 2. The ^{13}C overabundance is quite comparable for the three profiles (ranging 200–360); ^{21}Ne is formed in abundance 100 times solar for profiles 2 and 3. This results from the destruction of ^{20}Ne via $^{20}\mathrm{Ne}(p,\gamma)^{21}\mathrm{Na}$; the slightly higher peak temperature achieved for profile 4 allowed the further destruction of ^{21}Na to occur, reducing by a factor 10 the final ^{21}Ne concentration. We note, however, that the excesses of ^{13}C and ^{21}Ne formed relative to solar are far less, on the average, than those of ^{15}N and ^{17}O.

c) Nucleosynthesis in the Presence of Convection

Convection plays a critical role in defining the character of thermonuclear runaways leading to nova eruptions: it both allows the replenishment of ^{12}C fuel to sustain the runaway and transports positron-unstable isotopes into the outer regions of the envelope where they can provide an energy source even at lower temperatures. With regard to nucleosynthesis, it can also assist in the preservation of rarer species by carrying them to cooler regions of the envelope prior to their destruction. We note that convection simulates freeze-out to a limited extent, because element mixing goes both ways between the "hot" zone and the "cold" zone.

The influence of convective mixing has been determined for models 1 to 4, for which $T_9 < 1$, in the manner described in § II. Two sets of computations were performed: (1) with a mass fraction of the inner zone $p = 0.5$ and a convective time scale $\tau_c = 300$ s; and (2) $p = 0.1$ and $\tau_c = 1000$ s. As the results were found to be rather insensitive to the choice of these parameters, only the latter cases are presented (cols. [1*b*], [2*b*], [3*b*], and [4*b*] of Table 2).

In general, nuclear burning in the presence of convection results in abundance enhancements (averaged over the entire extent of the convective region) which are comparable to those obtained without mixing. Models 1, 2, and 4 illustrate this behavior. In the case of model 3, convection increases the final enhancements of ^{13}C, ^{15}N, and ^{17}O by factors 2, 70, and 2.5 respectively. (The abundance histories for nuclei of mass 15 are illustrated in Fig. 2.) For these elements, the effect of the convection is to carry the β-unstable elements to a low-temperature zone where the products of the β-decays are more refractory. An extreme example of this behavior is provided by the case of ^{23}Na; ^{23}Na is formed by $^{22}\mathrm{Ne}(p,\gamma)^{23}\mathrm{Na}$ (rate R_1) and destroyed by $^{23}\mathrm{Na}(p,\gamma)^{24}\mathrm{Mg}$ and $^{23}\mathrm{Na}(p,\alpha)^{20}\mathrm{Ne}$ (rates R_2 and R_3), and the equilibrium ratio $X(^{23}\mathrm{Na})/X(^{22}\mathrm{Ne}) = R_1/(R_2 + R_3)$ is attained in a few seconds when $T_8 > 1.5$. However, ^{22}Ne is hardly replenished by ^{22}Na (lifetime 1.1×10^8 s), and ^{23}Na is in turn destroyed. In the convective case, ^{23}Na is mixed away before it is destroyed, and its final abundance increases from 3.5×10^{-12} to 2.3×10^{-5}.

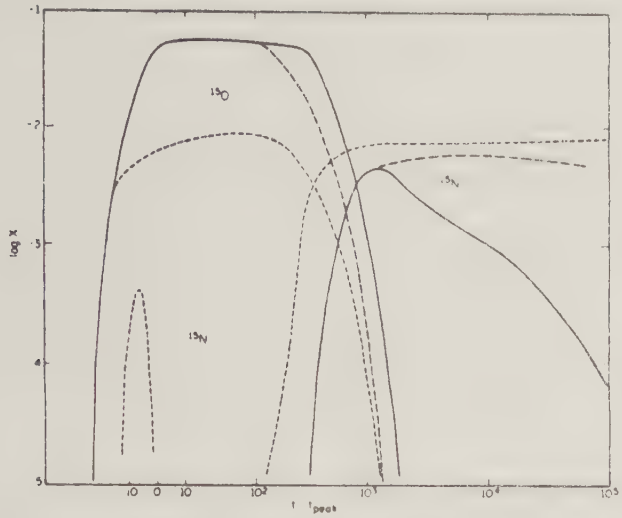


FIG. 2.—Variations with time of the mass fractions of ^{15}O and ^{15}N occurring for nova profile 3. Solid lines correspond to the standard, single-zone evolution. The dashed and dotted lines correspond to the abundances in the inner (*hot*) and outer (*cold*) parts of the convective region.

In summary, the effects of convective mixing can be of three kinds:

a) When the production of a rare element is limited by the reaction rate and not by the abundance of the parent nucleus, the total mass (of the given element) remains the same as that computed in the nonconvective case and the final abundance is diluted over the convective zone (see, e.g., ^{21}Ne for profile 2).

b) When the production of the rare species is limited by the abundance of the parent nucleus, the final mass fraction of the rare species is the same as in the nonconvective case and the mass produced increases proportionally to that of the convective zone. The results displayed in Table 2 show that this is the most frequent case.

c) Convective mixing may prevent the destruction of the product nucleus by carrying it to a lower-temperature zone, thereby increasing its final abundance.

IV. DISCUSSION

The results presented in the previous section make evident two very general characteristics of hydrogen burning proceeding on carbon, nitrogen, and oxygen nuclei at high temperatures. (1) For temperatures in the range $1 < T_8 < 10$, thermonuclear reactions will generally yield very nonsolar distributions of abundances of the CNO isotopes. Large overabundances of some or all of the rarer isotopes ^{13}C, ^{15}N, and ^{17}O are typically realized. (2) The details of the resulting abundance distributions are very strongly dependent upon the peak temperature, convective mixing of fresh (unprocessed) matter into the burning region, and, particularly, the time dependence of the expansion (cooling) profile. Given these great sensitivities, it is difficult to predict with confidence the role of nova explosions in nucleosynthesis. Certainly, studies of nucleosynthesis based upon the use of exponential expansion profiles must be viewed with caution.

TABLE 3

ABUNDANCE ENHANCEMENTS ACHIEVED FOR EXPONENTIAL EXPANSIONS FROM PEAK TEMPERATURES AND DENSITIES PREDICTED FOR NOVA PROFILES

Isotope	Profile 1	Profile 2	Profile 3	Profile 4
^{12}C	120	...	...	...
^{13}C	2700	4	12	25
^{14}N	4	35	50	40
^{15}N	5	1100	4200	17000
^{16}O	...	2	...	...
^{17}O	7	8000	2000	1000
^{18}O	...	...	...	...
^{19}F	...	...	...	...
^{20}Ne	...	...	...	...
^{21}Ne	...	17	300	290
^{22}Ne	...	...	1.6	3

To further illustrate this point, we have recalculated the abundances resulting for the four nova models on the assumption that the matter expands and cools (from peak temperature) in a purely exponential manner. These profiles, indicated by dashed lines in Figure 1, fall far more precipitously than do those extracted from the hydrodynamic models. The resulting enhancements of CNO isotopes, shown in Table 3, significantly differ from those calculated previously (Table 2). We note, in particular, that:

1. The nova profiles generally predict increased concentrations of ^{13}C. The extended time spent at a temperature $T_i \sim 0.3$ for these cases allows increased recycling of matter to carbon via $^{15}N(p, \alpha)^{12}C$.

2. Increased production of ^{15}N and, particularly, ^{17}O is predicted for the more rapidly falling temperature profiles. The shortened time scale ensures that, following ^{15}O and ^{17}F decay, the $^{15}N(p, \alpha)^{12}C$ and $^{17}O(p, \alpha)^{14}N$ reactions will operate less efficiently.

3. The exponential profiles allow somewhat increased production of ^{19}F and ^{21}Ne, again because, following decay of their progenitors, ^{19}Ne and ^{21}Na, they cannot be as readily destroyed. This behavior is most noticeable for profile 4; here, the higher peak temperature allows greater production of the progenitors ^{19}Ne and ^{21}Na. Given these differences in abundance predictions, we must conclude that reliable measures of the role played by explosive hydrogen burning in nucleosynthesis can only be provided with the use of more realistic temperature-density histories of ejected matter extracted from hydrodynamic models.

V. CONCLUSIONS

The origin of the seven stable isotopes of carbon, nitrogen, and oxygen remains an unsolved problem. Current views about the mechanisms of nucleosynthesis of these nuclei indicate a collective history which is extremely complex. Theoretical studies have revealed that quite varied astrophysical sites can contribute significantly to their production, including CNO-cycle hydrogen burning, core helium burning, thermal relaxation oscillations associated with double-shell

burning configurations in red giants, and explosive environments provided by supermassive stars and nova explosions. Detailed quantitative estimates of contributions from these diverse sites are clearly important: coupled to increasing observations of CNO elemental and, particularly, isotopic abundances (Wannier *et al.* 1976; Linke *et al.* 1977), such studies can yield important inferences concerning the history of the interstellar medium, galactic evolution (see, e.g., the study by Audouze *et al.* 1977), the sources of cosmic rays, stellar evolution, and the mechanism of nova explosions.

There does exist general agreement regarding the dominant modes of nucleosynthesis of some of these lighter nuclei: ^{12}C, ^{16}O, ^{14}N, ^{20}Ne, ^{23}Na, and ^{24}Mg.

Our calculations indicate that novae may contribute to the galactic abundances of some isotopes. Novae can, over some range of conditions, form large concentrations of ^{13}C, ^{15}N, and ^{17}O. They may also represent an important source of ^{7}Li, as recently demonstrated by Starrfield *et al.* (1978). In fact, the large enrichment of nova matter in CNO abundances which seems demanded for mass ejection (Starrfield, Sparks, and Truran 1976) virtually ensures that some of these isotopes will be overproduced by enormous factors. On the other hand, the production of ^{18}O, ^{19}F, and ^{21}Ne in significant concentrations does not result for reasonable choices of temperature and time scale conditions; their origin must be tied to other astrophysical environments.

REFERENCES

Arnould, M., and Beelen, W. 1974, *Astr. Ap.*, **33**, 215.
Arnould, M., and Nørgaard, H. 1978, *Astr. Ap.*, **64**, 195.
Audouze, J., and Fricke, K. J. 1973, *Ap. J.*, **186**, 239.
Audouze, J., Lequeux, J., Rocca-Volmerange, B., and Vigroux, L. 1977, in CNO *Isotopes in Astrophysics*, ed. J. Audouze (Dordrecht: Reidel), p. 155.
Audouze, J., Truran, J. W., and Zimmerman, B. A. 1973, *Ap. J.*, **184**, 493.
Cameron, A. G. W. 1973, *Space Sci. Rev.*, **15**, 121.
Cowan, J. J., and Rose, W. K. 1975, *Ap. J.* (*Letters*), **201**, L45.
Fowler, W. A. (1966), in *High Energy Astrophysics*, ed. L. Gratton (New York: Academic Press), p. 313.
Fowler, W. A., Caughlan, G. R., and Zimmerman, B. A. 1975, *Ann. Rev. Astr. Ap.*, **13**, 69.
Fricke, K. J. 1973, *Ap. J.*, **183**, 941.
———. 1974, *Ap. J.*, **189**, 535.
Howard, W. M., Arnett, W. D., and Clayton, D. D. 1971, *Ap. J.*, **165**, 495.
Linke, R. A., Goldsmith, P. F., Wannier, P. G., Wilson, R. W., and Penzias, A. A. 1977, *Ap. J.*, **214**, 50.
Nørgaard, H. 1977, *Ap. J.*, **215**, 200.
Prialnik, D., Shara, M., and Shaviv, G. 1978, *Astr. Ap.*, **62**, 339.
Robinson, E. L. 1976, *Ann. Rev. Astr. Ap.*, **14**, 119.
Rolfs, C., and Rodney, W. S. 1974, *Ap. J.* (*Letters*), **194**, L63.
Sparks, W. M., Starrfield, S. G., and Truran, J. W. 1976*a*, *Bull. AAS*, **8**, 321.
———. 1976*b*, *Ap. J.*, **208**, 819.
———. 1978, *Ap. J.*, **220**, 1063.
Starrfield, S. G., Sparks, W. M., and Truran, J. W. 1974, *Ap. J. Suppl.*, **28**, 247.
———. 1976, in *IAU Symposium No. 73, Structure and Evolution of Close Binaries*, ed. P. Eggleton, J. Whelan, and S. Mitton (Dordrecht: Reidel), p. 155.
———. 1977, in CNO *Isotopes in Astrophysics*, ed. J. Audouze (Dordrecht: Reidel), p. 49.
Starrfield, S. G., Truran, J. W., and Sparks, W. M. 1978, preprint.
Starrfield, S. G., Truran, J. W., Sparks, W. M., and Arnould, M. 1978, *Ap. J.*, **222**, 600.
Starrfield, S. G., Truran, J. W., Sparks, W. M., and Kutter, G. S. 1972, *Ap. J.*, **176**, 169.
von Hoerner, S., and Saslaw, W. C. 1976, *Ap. J.*, **206**, 917.
Wannier, P. G., Lucas, R., Linke, R. A., Encrenaz, P. J., Penzias, A. A., and Wilson, R. W. 1976, *Ap. J.* (*Letters*), **205**, L169.
Warner, E. 1976, in *IAU Symposium No. 73, Structure and Evolution of Close Binaries*, ed. P. Eggleton, J. Whelan, and S. Mitton (Dordrecht: Reidel), p. 85.

JEAN AUDOUZE and BERNARD LAZAREFF: Institut d'Astrophysique, 98 bis, Bd. Arago, 75014 Paris, France

SUMNER STARRFIELD: Department of Physics, Arizona State University, Tempe, AZ 85281

JAMES W. TRURAN: Department of Astronomy, University of Illinois, Urbana, IL 61801

Astron. Astrophys. 00, *1–6* (1981)

ASTRONOMY AND ASTROPHYSICS

Metallicity and Dynamical Parameters for Spheroidal and Elliptical Galaxies

L. Vigroux[1,2], J. P. Chièze[3,4], and B. Lazareff[3,5]

[1] DPh/EP/SAP, CEN-Saclay, BP No. 2, F-91190 Gif-sur-Yvette, France
[2] Laboratorio di Astrofisica Spaziale, CP 67, I-00044 Frascati, Italy
[3] Institut d'Astrophysique de Paris, 98bis Bld. Arago, F-75014 Paris, France
[4] Service de Physique Neutronique et Nucléaire, Centre d'Etudes de Bruyères-le-Châtel, BP. No. 561, F-92542 Montrouge Cedex, France
[5] Département de Radioastronomie, Observatoire de Meudon, F-92190 Meudon, France

Received May 23, accepted October 21, 1980

Summary. Optical and infrared data on Virgo elliptical galaxies and Local Group dwarf ellipticals are used to deduce dynamical parameters and metallicity. A relation is found between metallicity and escape velocity. It extends over a range of 14 mag from normal ellipticals down to dwarf sheroidal systems, but breaks down when applied to globular clusters. A simple model reproduces the general trend of the observations.

Key words: galactic evolution – galactic structure – dwarf galaxies – globular clusters

Introduction

The correlation between color and luminosity for early-type galaxies is now well established (see Visvanathan and Sandage, 1977). The interpretation of color differences between galaxies as arising from different metallicity is supported by narrow band photometry (Faber, 1977). A model for galaxy formation involving gas ejection by supernovae has been proposed by Larson (1974). In such a model, one expects that the metal enrichment attained by a galaxy is correlated with the depth of the potential well. It is therefore interesting to study the correlation of metallicity with the potential energy per unit mass.

Previous studies of the color-magnitude correlation have generally included bright galaxies of nearby clusters. It is interesting to include dwarf spheroidal galaxies in the same study to determine whether they share a common relationship with the brighter ellipticals.

Our sample includes those galaxies in the Virgo cluster whose $V-K$ colors have been measured by Persson et al. (1979), and eight dwarf spheroidal and elliptical systems of the Local Group (see Table 3). We have not included other field galaxies whose distances are poorly known, or galaxies from more distant clusters whose core radii are not sufficiently well resolved.

In Sect. 2, we explain how we have estimated the metallicity of the galaxies, while in Sect. 3 we discuss the determination of escape velocity. Section 4 is devoted to the results and their discussion. In Sect. 5, we compare the dwarf spheroidal galaxies and the globular clusters. Conclusions are presented in 6.

Send offprint requests to: L. Vigroux[1]

2. Determination of Metallicity

The metallicity of elliptical galaxies can be estimated either by absorption line strength as measured by narrow band photometry or spectrophotometry, or by broad band photometry of the integrated colors. The observations of absorption lines give more accurate results than broad band photometry. However, as they are much more painful to do, the measurements of line strength have been performed so far on a small sample of galaxies. In narrow band photometry the most important samples can be found in McClure and Van den Berg (1968) (16 galaxies) for DDO photometry and in Faber (1973) and Burstein (1979) for the 10 color system and the Mg index (27 galaxies). Spectrophotometry has been obtained for very few elliptical galaxies: M 32, NGC 4472, 4552 (O'Connell, 1976, 1980; Cohen, 1978, 1979). These results converge towards a high metallicity for elliptical galaxies, typically $M/H = 0.0–0.3$. Among these galaxies those which belong to the Virgo cluster are too few (7 only) to allow a statistical study of metallicity. We turn then to the broad band photometry. It was well known (e.g. Faber, 1977) that $U-V$ color correlates with metallicity. Moreover, recent studies (Aaronson et al., 1978) show a very good correlation between near infrared colors ($V-K$ and $J-K$) and metallicity. ($V-K$) depends mainly of the position of the giant branch while ($U-V$) depends on the giant branch, but also on the horizontal branch. Since the horizontal branch morphology is not uniquely correlated to the metallicity, the relation between ($U-V$) and Fe/H may be less defined than the one using ($V-K$). Then, when it is possible (i.e. for the brightest galaxies of our sample), we have preferred to derive metallicity from the ($V-K$) color. More precisely, we have used the ($V-K$) value at $\log A/D(0) = -0.6$ given by Persson et al. (1979) where A is the aperture and $D(0)$ the corrected face-on diameter given in the second Reference Catalogue of Bright Galaxies (de Vaucouleurs et al., 1976; hereinafter RC2. The calibration of $V-K$ as a function of metallicity is the one of Aaronson et al. (1978) for $[M/H] < -1.5$ and for $[M/H] > -1.5$ we adopt the following form

$$V-K = 0.22\,[M/H]^2 + 0.9\,[M/H] + 3.04 \qquad (1)$$

which reproduces better than the linear fit the theoretical model for metallicity $[M/H] > 0$.

($U-V$) was used only for Fornax, NGC 147, 185, and 205. NGC 205 is a special case, because the central color is anomalously blue (see, Hodge, 1937). We used the colors of the outer parts (Sandage, 1972) and the reddening of McClure and Racine (1969), and obtained $(U-V)_0 = 0.89$. The influence of the blue nucleus on the integrated colors is appeciable even at the half light radius as

Table 1. Properties of model mass distributions

Log c	King models		Modified hubble	
	μ	φ	μ	φ
1.03	11.8	0.64	25.9	0.91
1.53	24.9	0.84	40.4	0.97
2.12	69.9	1.04	57.5	0.99
2.74	369.2	1.38	75.4	1.00

given in RC2: $(U-V)^0=0.81$. This change would correspond to a change of -0.2 in the estimated (Fe/H). Color gradients are also known to exist in NGC 185, but there is no published photometry outside the nucleus. The metallicity of UMi and Sculptor galaxies are derived from the morphology of the H–R diagram (Schommer et al., 1978; Kunkel and Demers, 1977). For Draco we have used the mean value of the metallicity given by Zinn (1978). Fornax is the furthest of the dwarf spheroidals; the observed H–R diagram is then restricted to the upper giant branch. In this case, the calibration of metallicity from the H–R diagram (Demers et al., 1979) is very unprecise and we prefer to derive metallicity from the $U-V$ colors. The diversity of the metallicity determination is only apparent since the calibration of metallicity from broad band colors in the low metallicity regions relies on the properties of the H–R diagram.

3. Determination of Escape Velocities

In this section, we outline the procedure we use to determine escape velocities from observed optical properties of galaxies. The escape velocity has two advantages. First, its connection with other properties like color or metallicity may be more readily understood from a theoretical viewpoint. Secondly, its determination from observed quantities suffers less uncertainties.

Assuming the mass to light ratio to be known and constant, the surface brightness can be converted to a surface mass distribution. We used $M/L_B=7$ for Virgo galaxies, in agreement with recent determinations (Faber and Jackson, 1976; Sargent et al., 1977; Young et al., 1978; Schechter and Gunn, 1979). For Local Group galaxies, see discussion below. Since the inversion from surface to volume distributions is not practically feasible with noisy or incomplete data, we fit the surface brightness with a model whose volume density is known.

Several parametrizations are currently used for brightness profiles of elliptical galaxies. De Vaucouleur's law has been applied to a large number of galaxies, but the underlying mass distribution is singular. King's models are dynamically consistent; besides, a King model with log $c=2.2$ has nearly the same brightness distribution as the de Vaucouleurs law (King, 1966), except very close to the center and in the far halo, regions which are not observable. King's data provide the reduced mass $\mu=M/\varrho_0 r_c^3$ and the reduced potential at the center:

$$\varphi=[V(\infty)-V(0)]/4\pi G r_c^2 \varrho_0. \tag{2}$$

Where M is the total mass, ϱ_0 the central density, r_c the core radius and $c=r_t/r_c$ the concentration parameter.

We have computed the same quantities for a volume density:

$$\varrho(r)=\varrho_0(1+(r/r_c)^2)^{-3/2} \tag{3}$$

truncated abruptly at r_t.

$$\mu=4\,(\mathrm{Arg\,Sh}\ c-c(1+c^2)^{-1/2})$$

$$\simeq 4\,(\mathrm{Ln}\,(2c)-1)$$

$$\Delta=1-(1+c^2)^{-1/2}.$$

The resulting surface density is similar to the modified Hubble law proposed by Oemler (1976). Table 1 gives μ and φ as a function of $c=r_t/r_c$ for both types of mass distribution. It is clear that the determinations of the total mass and of the escape velocity are both invalid if large haloes of dark (high M/L) matter surround the galaxies. If, however, haloes of low surface brightness but normal M/L escape detection, the results of Table 1 show that Δ is better determined than μ from observations.

For elliptical galaxies in Virgo, log $c=2.2$ was assumed, and the data of the second Reference Catalogue RC2 were used. We converted the RC2 photometry into an equivalent King model using:

$$\theta_c=0.071\,\theta_e$$

$$\log I_0=\log I+2.0$$

$$\log(\theta_c/1'')=0.48+\log A_e-0.55\,(\log R_{25})^2 \tag{4}$$

$$\mu_0=4.13+B_T+5\log(\theta_c/1''). \tag{5}$$

In these formulae subscript e refers to properties at the effective radius, as defined in RC2, subscript c at the core radius, and subscript 0 at the center. θ is the angular radius, I the surface brightness and μ_0 the central surface brightness in magnitude by square arc s. A_e is the effective aperture, B_T the asymptotic magnitude and log R_{25} the isophotal axis ratio as defined in RC2.

Taking 12 Mpc as the distance of Virgo cluster (De Vaoucouleur, 1973), we obtain the central escape velocity:

$$v_e^2=2.7\ 10^{11}\,(d/1\ \mathrm{Mpc})\,(\theta_c/1'')\ 10^{-0.4\mu_0}. \tag{6}$$

For the elliptical galaxies of the Local Group, we have in general used the Hodge results. The total mass, core radius and concentration of Draco, Sculptor and UMi are those of Hodge (1971). We have then computed the escape velocity using the appropriate King model. The case of Fornax is more ambiguous; the core radius and the concentration are derived by Hodge and Smith (1976) from stars counts. However, different results can be obtained following the choice of the asymptotic magnitude or of the central surface brightness as the scale factor of the King model. However, the stars count profile seems to be less steep than the photometric profile and large errors can be made if one extrapolates the photometric profile. For this reason, we use the central surface brightness of Hodge and Smith (1974). With these parameters the mass of Fornax turns out to be $1.2\ 10^8\ M_\odot$ which is a factor 6 larger than the usually quoted value (Hodge, 1971). For all these dwarf galaxies we have used a M/L ratio of 1.7 which is the mean value obtained for globular clusters (Illingworth, 1976).

For the satellites of M 31: NGC 147, 185, and 205, we have derived the mass and the escape velocity from the Hodge (1963, 1973, 1976) measurements of central surface brightness, core radius and concentration. For NGC 205, the concentration is quite unknown. However, this uncertainty does not affect too severely our determination of v_e (a range of log c from 1.5 to 2.2 leads to a variation of 20% for v_e).

The escape velocity for M 32 was determined from the measurements of its velocity dispersion: 55 km s^{-1} (Williams, 1978). For these four galaxies we have a M/L of 4 which is the M/L ratio determined for M 32 from its velocity dispersion.

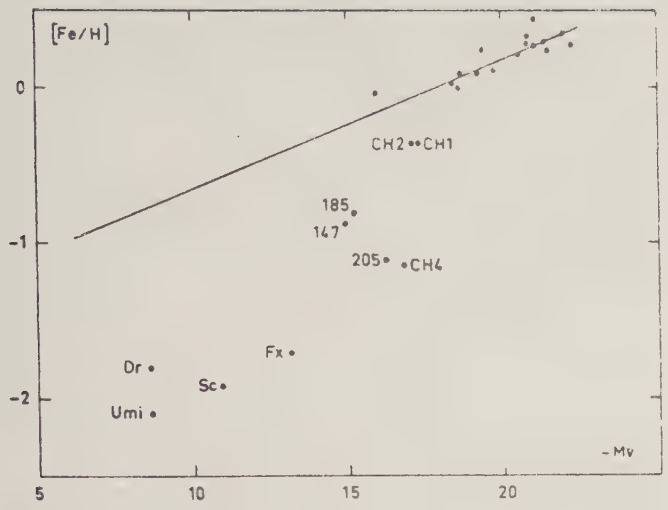


Fig. 1. Metallicity versus absolute visual magnitude. Dashed line is a least squares fit over the 15 non-dwarf Virgo galaxies

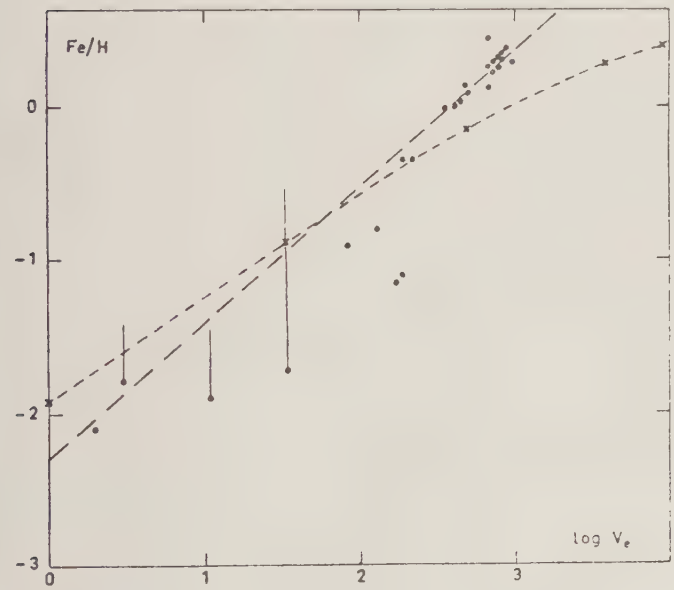


Fig. 2. Metallicity versus escape velocity. Dashed line as for Fig. 1. Vertical lines indicate range between the mean and the maximum metallicity for Draco, Sculptor, and Fornax. Dotted line is the model prediction

Table 2. Parameters for virgo galaxies

					[Fe/H]
N 4374	17.3	940	3.34	0.1	
N 4387	17.7	480	3.11	0.3	
N 4406	20.5	800	3.29	0.28	
N 4458	17.7	470	3.36	0.1	
N 4472	21.3	980	3.3	0.1	
4473	19.7	750	3.15	0.23	
N 4476	17.5	430	3.07	0.03	
N 4478	18.6	550	3.30	0.2	
N 4486	21.2	890	3.40	0.31	
N 4660	19.6	830	3.37	0.24	
4675	18.3	480	3.14	0.11	
N 4621	19.9	790	3.34	0.27	
N 4636	20.1	830	3.49	0.4	
N 4649	18.8	660	3.15	0.1	
N 4526	16.4	210	2.75	-0.35	
I 3581	16.3	190	2.75	-0.35	
N 4365	16.3	170	2.30	-0.74	

(1) Deduced from data of the 2nd Reference Catalogue, assuming $A_B = 0.2$ m, and $d = 12$ Mpc

(2) Fully corrected colors at $\log A/D(0) = -0.6$ from Persson et al. (1979)

(a) (b) (c) are respectively M 100 $CH1$, M 100 $CH2$, and M 100 $CH4$ in the above reference, corresponding to the chart numbers in Sandage (1972)

4. Results and Discussion

The computed escape velocities and metallicities appear in Tables 2 and 3. Figures 1 and 2 are are scatter diagrams of metallicity versus absolute visible magnitude, and escape velocity respectively. In each case we have computed the regression line for the subsample of 15 non-dwarf ellipticals of Virgo:

$$\mathrm{Fe/H} = -0.085\, M_v - 1.49 \quad (r = 0.84) \tag{7}$$

$$\mathrm{Fe/H} = 0.89 \log v_e - 2.29 \quad (r = 0.83). \tag{8}$$

The quality of the fits are comparable when one restricts the sample to non-dwarf Virgo galaxies. In both cases, the correlation is rather tight over the Virgo subsample. It is interesting to note, although not necessarily significant, that dwarf galaxies fall closer to the regression line of non-dwarf galaxies in the $(Z - v_e)$ plane than in the $(Z - M_v)$ plane. The qualitative difference between Figs. 1 and 2 cannot be explained by the fact that the adopted M/L ratio changes from dwarf to normal galaxies by a factor of 4: the effect can be judged qualitatively by displacing on Fig. 1 the four points in the bottom left corner by $2.5 \log 4 = 1.5$ to the left.

One can note that NGC 4636, which departs conspicuously from the $Z(v_e)$ relation among Virgo galaxies, has been found by Knapp et al. (1979) to contain gas, and by King (1978) to give one of the worst fits to theoretical luminosity profiles among the 16 ellipticals he studied.

It is possible to relate by a simple argument the metallicity of an elliptical galaxy to its *present* escape velocity. We make several simple (and probably simplistic) assumptions. First, we assume closed-box and instant-recycling chemical evolution. If p is the yield, and σ the fraction of the initial mass remaining as gas, then it is well known (e.g. Tinsley, 1980) that the gas metallicity is:

$$Z_g = p \,\mathrm{Ln}\,(\sigma^{-1}) \tag{9}$$

and the mean stellar metallicity:

$$Z_s = P[1 - \sigma \,\mathrm{Ln}\,(\sigma^{-1})/(1 - \sigma)]. \tag{10}$$

Following a formulation similar to, but slightly different from that of Larson (1974), we define ε_{SN} to be the energy gained by the gas from supernovae per unit of mass locked into stellar remnants. We assume that the galaxy loses its gas content when the specific energy of the gas becomes larger than the escape energy:

$$(1 - \sigma)\varepsilon_{SN}\ \sigma = \tfrac{1}{2} v_{e0}^2. \tag{11}$$

Finally, we assume that mass ejection occurs on a timescale long compared with the dynamical crossing time of the galaxy, and that the structure of the galaxy undergoes homologous transformations. One can then show using the virial equation and energy conser-

Table 3. Properties of some spheroidal and elliptical galaxies of the local group

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)				
Name	A_B	r kpc	r_c pc	Logc	μ $M_\odot/D^\circ$	M_V	M $M_\odot$	v_e km s^{-1}	[Fe/H]
UMi	0.29[1]	69[2]	203[3]	0.83[3]		-8[4]	1.5×10^5[4] (a)	2	-2.1[2] (b)
Draco	0.03[5]	76[5]	145[5]	0.8[6]		-8[4]	1.2×10^5[4] (a)	3	-1.5[7] (b)
Sculptor	0.06[8]	78[9]	270[4]	0.8[10]		-10.3[4]	3×10^6[4] (a)	11	-1.8[3] (b)
Fornax	0.20[1]	230[11]	940[12]	0.74[12]	23.4[12]	-13.9[11]	1.2×10^8	33	-1.7[11] (d)
NGC 147	0.57[1]	750 (e)	244[13]	1.0[13]	21.4[13]	-14.6[13]	3.6×10^8 (f)	93	-0.9 (g)
NGC 185	0.55[1]	750 (e)	114[14]	1.5[14]	19.96[14]	-15.4[14]	4.7×10^8 (f)	140	-0.8 (d)(g)
NGC 205	0.41[1]	750 (R)	120[15]	2 (i)	19.05[15]	-17[15]	1.6×10^9 (f)	5	-1.2 (d)
NGC 221	0.41[1]	750 (h)				-16.5[1]	1.2×10^8 (j)	22	-0.53 (k)

Column 1: Name of the galaxy
Column 2: B extinction
Column 3: Distance from the Sun in kpc
Column 4: Core radius in pc
Column 5: Concentration parameter
Column 6: Apparent central surface brightness in V magnitude by arc " square
Column 7: Absolute V magnitude
Column 8: Total mass of the galaxy in $M_\odot$
Column 9: Escape velocity from the center in km s^{-1}
Column 10: Metallicity

Note to Table 3:

[a] Mass estimated by Hodge from star counts using the M_3 luminosity function.
[b] Metallicity estimated from the H–R diagram morphology or stellar photometry.
[c] Mass determined from the central surface brightness with the appropriate King model and a M/L ratio of 1.7.
[d] Metallicity estimated from $(U-V)^0_e$, (see text for details).
[e] Distance calculated with an apparent distance modulus of 24.8 (1).
[f] As (c) but a M/L ratio of 4, (see text for details).
[g] Metallicity estimation may be affected by a color gradient due to some blue stars in the center of these two galaxies.
[h] Distance calculated with an apparent distance modulus of 24.68 (17).
[i] Hodge's photometry does not allow a precise determination of the tidal radius. However, the concentration c, is certainly larger than 1.5.
[j] Mass determined using the measurement of the velocity dispersion (18).
[k] Metallicity determined from $V-K$ (19).

Reference for Table 3:

1) RC 2
2) Schommer, Olsjenski, Kankel (1978)
3) Hodge (1964a)
4) Hodge (1971)
5) Stetson (1979)
6) Hodge (1964b)
7) Zinn (1978)
8) Philip (1974)
9) Kunkel and Demers (1977)
10) Innanen and Papp (1979)
11) de Vaucouleurs and Ables (1968)
12) Hodge and Smith (1974)
13) Hodge (1976)
14) Hodge (1963)
15) Hodge (1973)
16) Baade and Swope (1963)
17) Sandage and Tammann (1968)
18) Williams (1977)
19) Perrson et al. (1979)

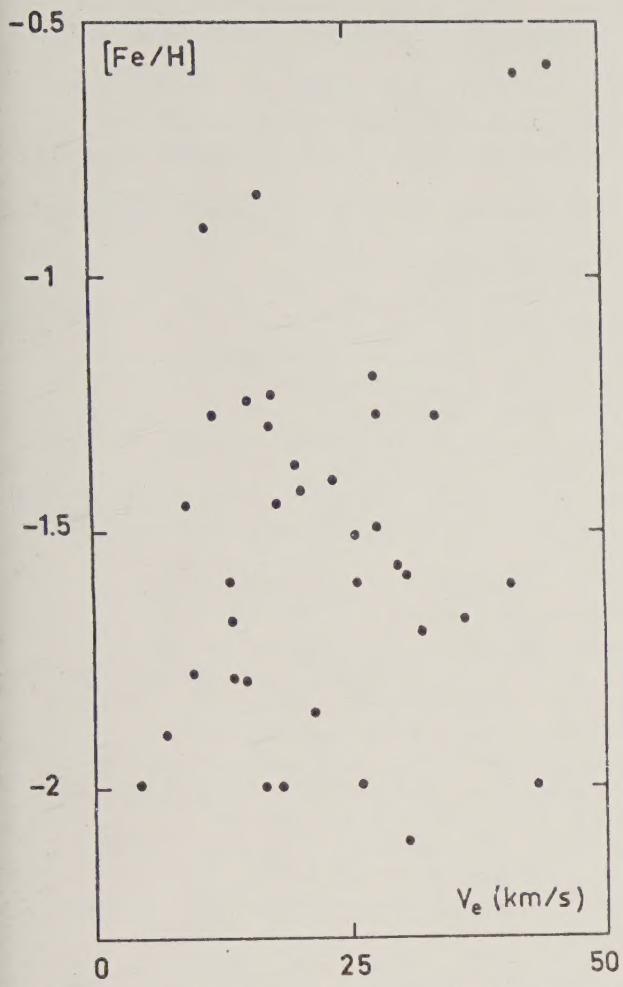


Fig. 3. Same as Fig. 2 but for globular clusters

Table 4. Relation between gas fraction at ejection σ, mean stellar metallicity Z_s, and final escape velocity v_{e1}

σ	$Z_s/Z_\odot$	v_{e1}
0.99	0.013	1
0.90	0.13	33
0.50	0.77	500
0.10	1.86	2,700
0.01	2.38	10,000

vation that the radius and escape velocity vary with mass:

$r \propto m^{-1}$; $v_e \propto m$,

so that the *final* escape velocity is given by:

$$v_{e1} = 2^{1/2}(1-\sigma)^{3/2}\sigma^{-1/2}\varepsilon_{SN}^{1/2}. \quad (12)$$

Equations (12) and (10) directly relate the present metallicity and escape velocity of elliptical galaxies, independently of initial conditions. The quantity ε_{SN} parametrizes our ignorance of the I.M.F. in young elliptical galaxies, and of the interactions of supernovae with the interstellar gas. The former is unknown, and the latter is still fair game for theoreticians (see e.g. McKee and Ostriker, 1977, and Cox, 1979). Based on an IMF similar to that of the solar neighborhood, the various parameters can be estimated as:

$p = 2.5Z$

$\varepsilon_{SN} = 10^{51}$ erg/100 $M_\odot = 5\,10^5$ (km s^{-1})^2.

The value of p was determined in such a way that a chemical evolution model of the Solar Neighborhood with a constant ratio of infall of 0.01 of the total mass per 10^9 yr fits the solar abundances.

Table 4 gives a few numerical values for the $Z_s(\sigma)$ and $v_{e1}(\sigma)$ relations, and the $Z_s(v_{e1})$ relation is superimposed on Fig. 2. The model reproduces the general trend of the observations. One must remember that the determinations of escape velocity and metallicity suffer from large uncertainties. More realistic models must be refined in two ways: the treatment of the interaction between the interstellar medium and the supernovae remnants and the chemical evolution of elliptical galaxies. Such models will be presented in a forthcoming paper. Taken at their face value, Eq. (10) and (12) imply that, prior to losing their gas content, dwarf galaxies such as Draco and UMi were 100 times more massive and 100 times more compact than in their present state. This agrees with the conclusion derived by Zinn (1978) following an analysis of the distribution of stellar metallicity in Draco.

5. Dwarf Spheroidal Galaxies and Globular Clusters

Differences between dwarf spheroidal galaxies and globular clusters were already noticed. First, dwarf spheroidal galaxies have much smaller surface brightness than globular clusters while they have comparable masses. Possibly more important on an evolutionary point of view, all dwarf spheroidal galaxies present a large dispersion of metallicity. The range of star metallicity goes from -2.3 to -1.4 in Draco (Zinn, 1978). UMi and Sculptor have a wide giant branch. Moreover, individual studies on several stars of these two galaxies show the presence of CN anomalies (Norris and Bessel, 1978). Fornax has several globular clusters; 5 among them have $U-V$ colors (cf. e.g. Harris and Racine, 1979; and reference therein). Using the $U-V$ calibration, the metallicity of these globular clusters range from -2.1 to -1.5. Moreover, the spectroscopy of a planetary nebula in Fornax (Danziger et al., 1978) shows an oxygen about half the solar value. Since production of oxygen by the planetary progenitor is very unlikely, this oxygen abundance may represent the composition of the interstellar gas when the star was formed. Then, there must be stars in Fornax with metallicity as large as -0.5. Similar enrichment can be found in NGC 147, NGC 185, and NGC 205. These 3 galaxies have globular clusters; using their $U-V$ color (cf. Harris and Racine, 1979) their metallicity lies between -2.2 and -1.5 while the average metallicity determined from the integrated colors are close to -1. It is not clear, at least in the case of dwarf spheroidals, if this range of metallicity is primordial or due to some self enrichment produced by star formation and star death. Our analysis shows that dwarf spheroidals belong to the same relation between M/H and the escape velocity as do the more massive elliptical. This is strongly in favor of the self enrichment possibility.

On the contrary, globular clusters with the exception of ω Cen, show no or very little dispersion in metallicity. Moreover, from the existing data (Peterson and King, 1975) it is possible to draw for globular clusters the metallicity versus escape velocity diagram (Fig. 3). There is no obvious correlation between these two quantities. This result is already known, there are no cor-

relations between chemical and dynamical properties of globular clusters. The metallicity of globular clusters may reflect only the metallicity at the time and place of the galaxy when they formed. The only exception to this rule may be ω Cen. From the Da Costa (1979) photometry and with a M/L ratio of 1.7 we derive, using a King model, a mass of $2\ 10^6\ M_\odot$ and an escape velocity of 51 km s^{-1}. The metallicity ranges from -2 up to -0.8 (Searle and Zinn, 1978). We can notice that this range is very similar to the one of Fornax (-2, -0.5) as are their escape velocities (52 and 33 km s^{-1} respectively). Moreover, we can notice that if we take the maximum metallicity of ω Cen, it lies very close to the general relation between M/H and v_e. This similarity suggests that as in dwarf spheroidals, the dispersion in metallicity of ω Cen is due to self enrichment rather than primordial inhomogeneities.

6. Conclusion

The metallicity of elliptical galaxies is rather well correlated with their escape velocity. The $Z(v_e)$ relation can be extended down to the dwarf spheroidal systems of the Local Group, but not to the globular clusters. It therefore seems more justified to link the dwarf spheroidal systems with elliptical galaxies than with globular clusters, despite the fact that the masses of the latter are comparable. A simple model offers an explanation for the $Z(v_e)$ relation, but the treatment of the interactions of supernovae with the gas must be refined. The existence of a common $Z(v_e)$ relation for galaxies of both the Local Group and the Virgo cluster, over a wide range of masses, is an argument in favor of hot winds as the mechanism for removing the gas.

Acknowledgements. An important part of this work was done when L. Vigroux was in the Laboratorio di Astrofisico Spaziale in Frascati. He acknowledges Prof. V. Castellani for his very kind hospitality and Dr. F. Vagnetti who has facilitated his accommodation. Several people of this laboratory among whom I. Mazittelli and A. Tornambe have introduced him to the problems of globular clusters and dwarf spheroidal galaxies.

References

Aaronson, M., Cohen, J.G., Mould, J., Malkan, M.: 1978, *Astrophys. J.* **223**, 824
Baade, W., Swope, H.: 1963, *Astron. J.* **68**, 435
Burnstein, D.: 1979, *Astrophys. J.* **232**, 74
Cohen, J.: 1978, *Astrophys. J.* **221**, 780
Cohen, J.: 1979, *Astrophys. J.* **228**, 405
Cox, D.P.: 1979, *Astrophys. J.* **234**, 863
Da Costa, G.S.: 1979, *Astron. J.* **84**, 505
Danziger, I.J., Dopita, M.A., Hawarden, T.G., Webster, B.L.: 1978, *Astrophys. J.* **220**, 458
Demers, S., Kunkel, W.E., Hardy, E.H.: 1979, *Astrophys. J.* **232** 84
Faber, S.M.: 1973, *Astrophys. J.* **179**, 731
Faber, S.M., Jackson, R.E.: 1976, *Astrophys. J.* **204**, 668
Faber, S.M., Gallagher, J.S.: 1979, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **17** 135
Harris, W.E., Racine, R.: 1979, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **17** 241
Hodge, P.W.: 1963, *Astron. J.* **68**, 691
Hodge, P.W.: 1964a, *Astron. J.* **69**, 438
Hodge, P.W.: 1964b, *Astron. J.* **69**, 853
Hode, P.W.: 1971, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **9**, 35
Hodge, P.W.: 1973, *Astrophys. J.* **182**, 671
Hodge, P.W.: 1976, *Astron. J.* **81**, 25
Hodge, P.W., Smith, D.W.: 1974, *Astrophys. J.* **188**, 14
King, I.R.: 1966, *Astron. J.* **71**, 64
King, I.R.: 1978, *Astrophys. J.* **222**, 1
Knapp, G.R., Kerr, F.J., Henderson, A.P.: 1979, *Astrophys. J.* 234, 448
Kunkel, W.E., Demers, S.: 1977, *Astrophys. J.* **214**, 21
Illingworth, G.: 1976, *Astrophys. J.* **204**, 73
Innanen, K.A., Papp, K.A.: 1979, *Astron. J.* **84**, 601
Larson, R.B.: 1974, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **169**, 229
McClure, R.D., Van den Bergh, S.: 1968, *Astron. J.* **73**, 313
McClure, R.D., Racine, R.: 1969, *Astron. J.* **74**, 1000
McKee, C.F., Ostriker, J.P.: 1977, *Astrophys. J.* **218**, 148
Norris, J., Bessell, M.S.: 1978, *Astrophys. J. Letters* **225**, L49
O'Connell, R.W.: 1976, *Astrophys. J.* **206**, 370
O'Connell, R.W.: 1976, *Astrophys. J.* **236**, 430
Oelmer, A.: 1976, *Astrophys. J.* **209**, 693
Persson, S.E., Frogel, J.A., Aronson, M.: 1979, *Astrophys. J. Suppl.* **39**, × ×
Peterson, C.J., King, I.R.: 1975, *Astron. J.* **80**, 427
Philip, A.G.D.: 1974, *Astrophys. J.* **190**, 573
Sandage, A.: 1972, *Astrophys. J.* **176**, 21
Sandage, A.R., Tammann, G.: 1968, *Astrophys. J.* **151**, 531
Sargent, W.L.W., Schechter, P.L., Boksenberg, A., Shortridge, K.: 1977, *Astrophys. J.* **212**, 326
Schechter, P.L., Gunn, J.E.: 1979, *Astrophys. J.* **229**, 472
Schommer, R.A., Olszewski, E.W., Kunkel, W.E.: 1978, in *The HR Diagram*, I.A.U. Colloquium, ed. Philip G. D. and Hayer, O. S., × × ×
Searle, L., Zinn, R.: 1978, *Astrophys. J.* **229**, 357
Stetson, P.R.: 1979, *Astron. J.* **84**, 1149
Tinsley, B.M.: 1980, *Fund. Cosmic Phys.* **5**, 1
de Vaucouleurs, G., Ables, H.D.: 1968, *Astrophys. J.* **151**, 105
de Vaucouleurs, G.: 1975, in *Stars and Stellar Systems* IX. Sandage, A., Sandage, M., Kristian, J., ed.
de Vaucouleurs, G., de Vaucouleurs, A., Corwin, H.G., Second Reference Catalogue, Univ. Texas, Austin. (RC2)
Visvanathan, N., Sandage, A.: 1977, *Astrophys. J.* **216**, 214
Williams, T.B.: 1977, *Astrophys. J.* **214**, 685

L. Vigroux et al.: Metallicity and Dynamical Parameters for E Galaxies
L. Vigroux et al.: Metallicity and Dynamical Parameters for E Galaxies